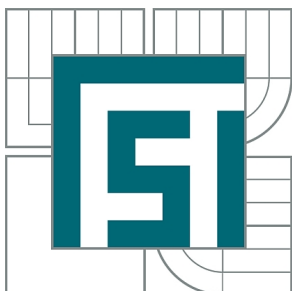


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO
INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

DEFORMAČNĚ NAPĚŤOVÁ ANALÝZA TĚLES S VÝRAZNĚ ZAKŘIVENOU STŘEDNICÍ

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF THE SOLIDS WITH HIGHLY CURVED CENTERLINE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

ONDŘEJ PETER

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. KAMIL NOVÁK

BRNO 2015

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Ondřej Peter

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Stavba strojů a zařízení (2302R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Deformačně napěťová analýza těles s výrazně zakřivenou střednicí

v anglickém jazyce:

Stress-strain analysis of the solids with highly curved centerline

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při řešení deformačně napěťových stavů prutových těles můžeme použít teorii slabě a silně zakřivených prutů. U těles s výrazně zakřivenou střednicí dochází k několika podstatným rozdílům. Rozložení napětí má hyperbolický průběh a poloha neutrální osy není totožná se střednicí prutu. Teorie silně zakřivených prutů vznikla jako důsledek častého porušení řetězů, závěsných ok, háků nebo ojníc na konci 19. století.

Cílem této práce je vybrat specifické případy těles s výrazně zakřivenou střednicí a provést deformačně napěťovou analýzu a to nejen analyticky ale i numericky. V analýzách je nutné zaměřit se i na vzájemnou interakci těles a prozkoumat rozložení stykového tlaku mezi tělesy a použitelnost analytických metod. Je očekáváno provedení experimentu.

Cíle bakalářské práce:

1. Provést rešerši o deformačně-napěťové analýze těles se zakřivenou střednicí a vhodně vybrat příklady z technické praxe.
2. Aplikovat analytické teorie (pro slabě a silně zakřivený prut) a porovnat rozdíly.
3. Použít konečno-prvkový program pro řešení D-N stavů (použití prvků Beam, rovinných prvků Plane a prostorových prvků Solid)
4. Diskutovat výsledky, výhody a nedostatky

Seznam odborné literatury:

1. Mechanika těles: Pružnost pevnost I, Janíček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J., VUT, 2004
2. Mechanika těles: Pružnost a pevnost II, Ondráček E., Vrbka J., Janíček P., Burša J., VUT, 2006
3. Pružnost a pevnost II: Úlohy do cvičení, Janíček, Petruška, VUT, 2006
4. Mechanics of Materials, Gere J.M., Timoshenko S.P., Chapman and Hall, London, 1991
5. Mechanics of Materials, Hibbeler, R.C., Pearson Prentice Hall, 2011
6. Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky 1., 2., Janíček P. VUT Cerm, 2010
7. Manuály Ansys

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Kamil Novák

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 20.11.2014

L.S.

prof. Ing. Václav Píštěk, DrSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá deformačně napět'ovou analýzou tělesa s výrazně zakřivenou střednicí. Práce je rozdělena na tři části: část rešeršní, výpočtovou a experimentální. V první části byly odvozeny všechny potřebné vztahy pro analytický přístup a uvedeny praktické příklady. Ve druhé části je zvolený výpočtový model posuzován analyticky a numericky, rozdíly jsou diskutovány. První a druhá část jsou následně zhodnoceny. Třetí část se věnuje experimentálnímu měření. Experiment je realizován pomocí odporové tenzometrie na zakřiveném tělese ve tvaru podkovy.

KLÍČOVÁ SLOVA

šroub s okem, deformačně napět'ová analýza, silně zakřivený prut, ANSYS

ABSTRACT

The bachelor thesis deals with stress-strain analysis of the solid with highly curved centerline. The thesis is divided into three main parts: background research, computation modelling and performing of the experiment. All analytical equations and practical examples were summarized in the first part of this thesis. In second part, computation model is solved by using analytical and numerical approach. Next, the analytical and numerical approaches are compared to each other. Third part deals with experiment.

KEY WORDS

eye bolt, stress-strain analysis, highly curved beam, ANSYS

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

PETER, O. Deformačně napět'ová analýza těles s výrazně zakřivenou střednicí. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 77 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Kamil Novák.

PROHLÁŠENÍ AUTORA O PŮVODNOSTI PRÁCE

Tímto prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Deformačně napět'ová analýza těles s výrazně zakřivenou střednicí vypracoval samostatně s využitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce.

Ondřej Peter

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji svému vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Kamilu Novákovi za jeho cenné rady, ochotu, trpělivost a vedení této práce.

Děkuji své rodině za podporu po celou dobu studia a při psaní této práce.

Děkuji panu Ing. Petru Krejčímu, Ph.D. za pomoc, poskytnutí prostorů a příslušenství při provádění experimentu.

OBSAH

OBSAH.....	1
ÚVOD.....	4
1 CÍLE PRÁCE	5
2 ZAKŘIVENÉ PRUTY	6
2.1 OHYB ZAKŘIVENÉHO PRUTU	6
2.2 HISTORIE	7
3 SLABĚ A SILNĚ ZAKŘIVENÉ PRUTY.....	8
3.1 ODVOZENÍ ROVNIC PRO SILNĚ ZAKŘIVENÝ PRUT.....	10
3.1.1 Ohybové napětí	10
3.1.2 Energie napjatosti.....	15
3.2 ODVOZENÍ ROVNIC PRO SLABĚ ZAKŘIVENÝ PRUT	17
3.2.1 Ohybové napětí	17
3.2.2 Energie napjatosti.....	18
3.3 KOEFICIENT SMYKU B.....	19
3.3.1 Obdélníkový průřez	19
3.3.2 Kruhový průřez	21
3.3.3 Další varianty výpočtu	21
4 EXPERIMENTÁLNÍ METODY.....	22
4.1 ODPOROVÁ TENZOMETRIE.....	22
4.2 FOTOELASTICIMETRIE	23
5 VYUŽITÍ MKP.....	24
5.1 VYBRANÉ PRVKY.....	25
5.2 DEGRADACE SÍTĚ	28
6 ŠROUB S OKEM.....	29
6.1 ANALYTICKÝ PŘÍSTUP	29
6.1.1 Řešení pomocí teorie silně zakřivených prutů	32
6.1.2 Řešení pomocí teorie slabě zakřivených prutů.....	38
6.2 NUMERICKÝ PŘÍSTUP	41
6.2.1 Řešení pomocí prvku BEAM 189.....	41
6.2.2 Řešení pomocí prvku PLANE 183.....	44
6.2.3 Řešení pomocí prvku SOLID 186.....	49
6.3 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ A JEJICH DISKUZE.....	56
7 DALŠÍ TĚLESA.....	60
8 EXPERIMENT.....	62
8.1 PROKÁZÁNÍ TEORIE SILNĚ ZAKŘIVENÝCH PRUTŮ.....	62
8.1.1 Řešení pomocí odporové tenzometrie	63
8.1.2 Analytické řešení.....	64
8.1.3 Numerické řešení.....	65
8.1.4 Řešení pomocí fotoelasticimetrie.....	66
8.2 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTŮ A JEJICH DISKUZE	68
9 ZÁVĚR	70
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	71

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	72
SEZNAM OBRÁZKŮ	74
SEZNAM TABULEK	76
SEZNAM PŘÍLOH	77

ÚVOD

V technické praxi se často setkáváme s tělesy, které mají výrazně zakřivenou střednici. Tyto tělesa můžeme definovat jako tělesa, která mají tvar oka, oko je jejich součástí nebo obsahují alespoň její část. Jako příklad si můžeme uvést závěsný šroub, článek řetězu, jeřábový hák či ojnici.

Abychom tyto tělesa mohli prozkoumat z pohledu deformace a napjatosti analytickým přístupem, musíme si jej nejprve z geometrického a zatěžovacího hlediska zjednodušit a vytvořit si výpočtový model, který jsme již schopni vyhodnotit. Tento výpočtový model použijeme i při vyhodnocování numerickým přístupem v programu ANSYS Workbench a výsledky srovnáme.

Jelikož u těchto těles často dochází k interakci s jinými tělesy, je třeba i tento faktor zahrnout do řešení. Při interakci těles vzniká na povrchu stykový tlak, který určitým způsobem ovlivní výslednou napjatost. Tento způsob se nejvíce blíží realitě, proto by měl být nejpřesnější metodou ze všech.

U každého výpočtu, ať už analytického či numerického, je potřeba si ověřit jeho správnost. Jelikož platí poučka „Předpokládej, že výsledky, které ti vyšly, jsou špatné“, je potřeba pro kontrolu provést další výpočty. Dobrou variantou ověření výsledku je provedení experimentu.

1 CÍLE PRÁCE

Protože se problematika silně zakřivených prutů na VUT FSI v kurzech „Pružnosti pevnosti“ velmi neřeší, bylo vytvořeno toto zadání za účelem rozšíření znalostí autora práce a také za účelem edukačním (jako možnost ukázat studentům těchto kurzů, jak se liší výsledky na různých úrovních výpočtového modelování).

Ve výše zmíněných kurzech se navíc řeší pouze školní úlohy, resp. úlohy na úrovni analytických teorií, kde se reálné zatížení nahrazuje abstraktní silou. Pro posouzení, zda nám takto zjednodušená realita stačí, je potřeba provést další analýzy se vzrůstající úrovní výpočtového modelování.

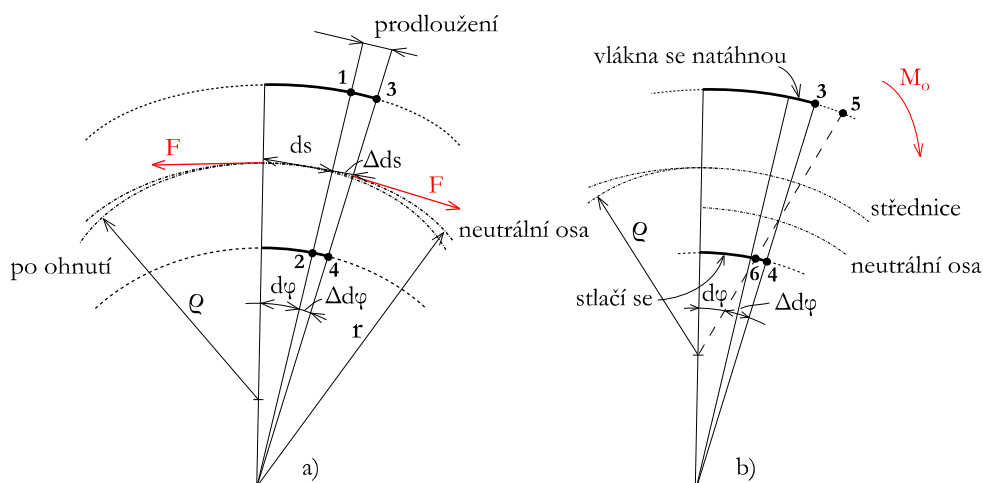
Cílem práce je tedy provést rešerši o deformačně-napět'ové analýze těles se zakřivenou střednicí. Následně aplikovat na konkrétní případ analytické teorie na dvou úrovních, a to dle teorie slabě zakřivených prutů a dle teorie silně zakřivených prutů. Dále vytvořit modely pomocí konečno-prvkového programu pro řešení D-N stavů na různé úrovni (použití prvku Beam, rovinných prvků Plane a prostorových prvků Solid). Výsledné hodnoty, výhody a nevýhody jednotlivých úrovní diskutovat. Cílem je také provedení experimentu na potvrzení či vyvrácení analytické teorie silně zakřivených prutů.

2 ZAKŘIVENÉ PRUTY

2.1 Ohyb zakřiveného prutu

Pro ohyb zakřiveného prutu platí, že síla F , kolmá k průřezu, vyvolá normálové napětí a průřez se díky tomu prodlouží. Průřez 12 se dostane do polohy 34 tak, jak je tomu na Obr. 1a.

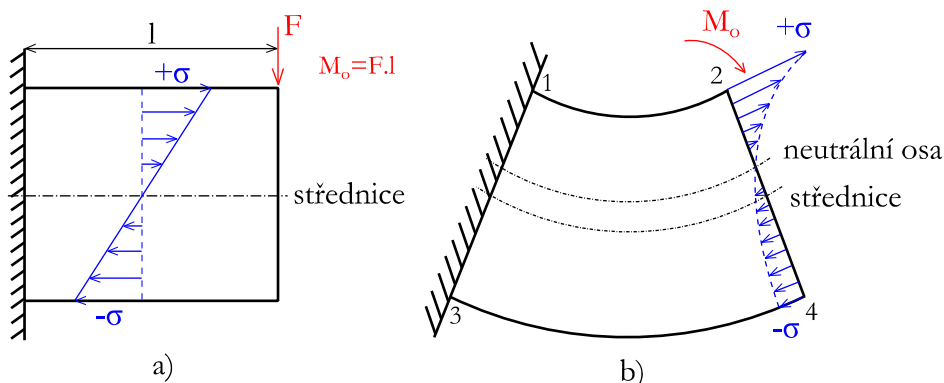
Také platí, že při působení ohybového momentu M_o se dodatečně posunutý průřez zkříví z polohy 34 do polohy 56, působí-li současně se silou F , viz Obr. 1b. Tím se původní poloměr křivosti r zmenší na ϱ .



Obr. 1: Vliv síly F (a) a ohybového momentu M_o (b) na průřez zakřiveného prutu

Na příčném průřezu přímého prutu namáhaného ohybovým momentem, lze předpokládat lineární průběh napětí dle Obr. 2a, protože přetvoření způsobená ohnutím prutu jsou od střednice přímo úměrná a z Hookova zákona platí, že napětí je úměrné přetvoření.

Na příčném průřezu zakřiveného prutu již není napětí rozděleno dle přímky, tj. není úměrné vzdálenosti od střednice. Stlačení vláken 12 je sice rovno prodloužení vláken 34, pokud se však kratší vlákna 12 prodlouží o stejnou délku jako delší vlákna 34, vznikne v nich nezbytně větší napětí z toho důvodu, že vznikne větší přetvoření, které je dáno poměrem natažení ku původní délce. Vnitřní obvod je natažen jako vnější, ale protože je kratší, je v něm větší napětí. Vlákna na vnějším obvodu jsou méně napínána. Průběh napětí je tedy hyperbolický dle Obr. 2b.

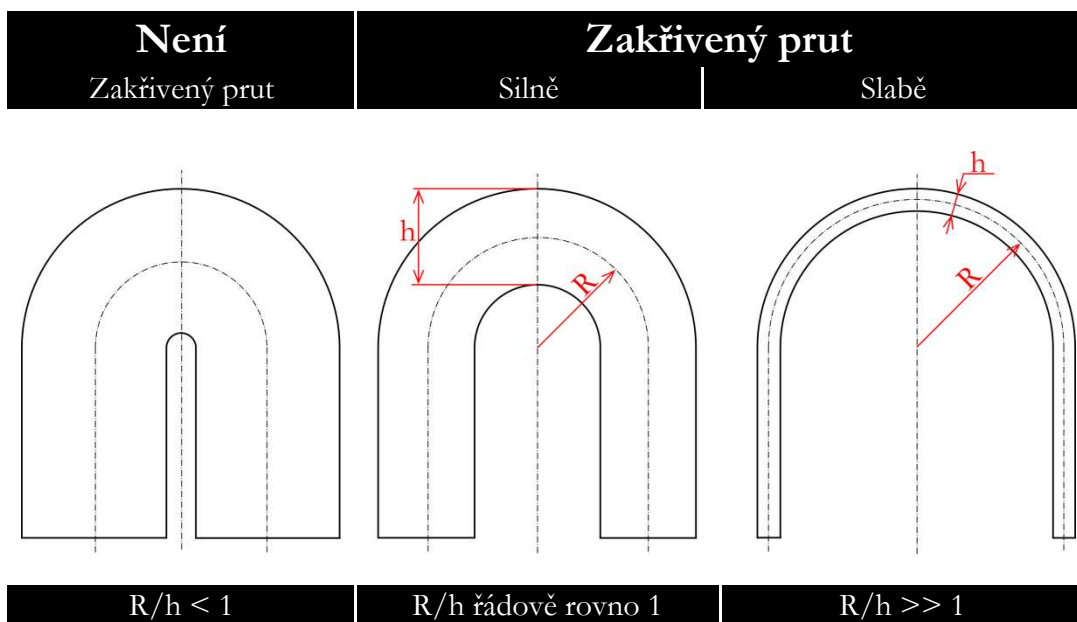


Obr. 2: Průběh napětí u přímého (a) a zakřiveného (b) prutu namáhaného ohybovým momentem

U zakřivených prutů působí krom obvodových napětí σ_t také radiální napětí σ_r . Přesným výpočtem se však dojde k velmi složitým vzorcům a zjistí se, že vliv napětí σ_r je nepatrný. Proto se v přibližných výpočtech vliv napětí σ_r zanedbává a předpokládáme, že obvodové napětí σ_t je úměrné poměrnému prodloužení ε .

2.2 Historie

Literatura zabývající se ohybem zakřivených prutů je velmi stará, ač k ní, jak se zdá, nebylo v praxi dlouho přihlíženo, neboť prof. Bach ještě po roce 1924 podrobně a důrazně dokazuje, že třeba háky se nemohou počítat jako rovné nosníky. První řešil ohyb křivých prutů ve střední Evropě Winkler, časopis *Zivilingenieur* 1858 s. 232, nebo ve spisu *Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Praha 1867. Dnes je běžná teorie založena na řešení od prof. Grashofova v knize *Theorie der Elastizität und Festigkeit*, 1878 a Bantlin *VDI-Zeitschrift* 1901 s. 164. Z novějších jmenujme Mayer, *Mat. Mech.* 1926 s. 216, kde ukázal, že Grashofova teorie dobře vyhovuje, dokud není tloušťka prutu proti poloměru zakřivení příliš velká (to mimochodem referují skripta PP1 [1], obrázek pod textem).



Obr. 3: Porovnání, kdy se jedná o silně/slabe zakřivený prut

3 SLABĚ A SILNĚ ZAKŘIVENÉ PRUTY

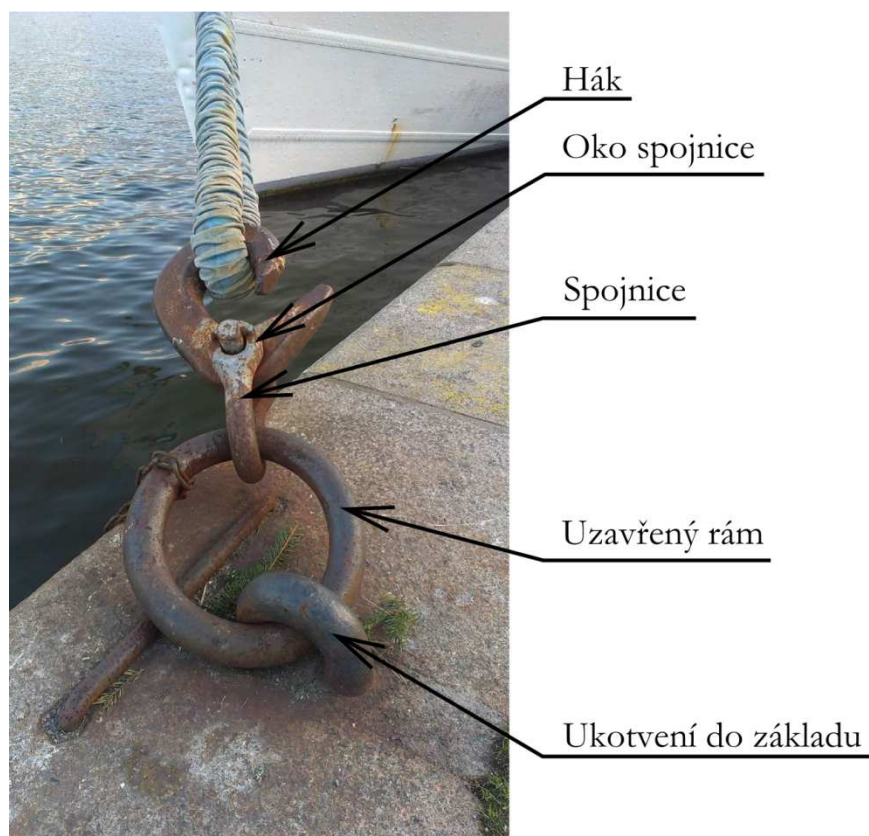
Je nutno rozlišovat pruty slabě a silně zakřivené.

Slabě zakřivený prut počítáme podle vzorců přímých prutů. Napětí je tedy po příčném průřezu rozděleno lineárně a neutrální osa je shodná se střednicí.

Silně zakřivený prut má napětí rozděleno po příčném průřezu hyperbolicky. Neutrální osa, která je bez napětí, je stlačena blíže k vnitřnímu okraji. Tímto je na vnitřním okraji zakřivení větší napětí. Radiální napětí se obvyčejně zanedbávají.

Mohl by vzniknout spor o tom, který prut je už před zatížením ohybovým momentem slabě nebo silně zakřiven. Dobrým rozlišením je zde základní Bernoulliho předpoklad pro ohyb přímých prutů, podle něhož body roviny kolmé k ose prutu leží i po ohnutí v rovině kolmé k prohnuté ose. Podle tohoto předpokladu lze usoudit, že ohybová napětí mají zhruba lineární průběh a nosník je slabě zakřiven, pokud vlákna mezi dvěma řezy kolmé k ose můžeme považovat za stejně dlouhá. Jsou-li velké rozdíly v délce těchto vláken, jedná se o silně zakřivený prut a napětí není rozděleno lineárně. Další možností, jak přibližně rozlišit tyto skupiny, je vypočítat si poměr poloměru křivosti v nedeformovaném stavu R ku výšce příčného průřezu v rovině střednice $b(d)$.

Jako praktický příklad je uvedena sestava pro ukotvení lodí v přístavu ve Švédsku (viz Obr. 4). Teorií slabě/silně zakřivených prutů bychom se zde měli zabývat celkově 5x (ukotvení do základu, uzavřený rám, spojnice mezi hákem a okem (uzavřeným rámem), oko na spojnici, hák na konci (ukotvení)).



Obr. 4: Sestava ukotvení lodí v přístavu

Řešením uzavřeného rámu dle teorie slabě i silně zakřivených prutů pro různý poměr $R/b(d)$ dostaneme soubor hodnot napětí. Jejich porovnáním získáme odchylku napětí $\Delta\sigma$, vypočtenou ze vztahu:

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma_{sil} - \sigma_{sla}}{\sigma_{sil}} \cdot 100 [\%]$$

Byly vypočteny hodnoty napětí k vnitřnímu povrchu rámu pro $R/b(d)$ v intervalu $\langle 1; 12 \rangle$ a následně určeny odchylky napětí, které jsou zobrazeny v Tab. 1. Průběh odchylek napětí v závislosti na poměru $R/b(d)$ lze vidět v grafu na Obr. 5.

R/h(d)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Delta\sigma$ [%]	33,8	17,3	11,8	9,0	7,2	6,1	5,2	4,6	4,1	3,7	3,3	3,2

Tab. 1: Soubor hodnot odchylek napětí v závislosti na poměru R/b kruhového rámu



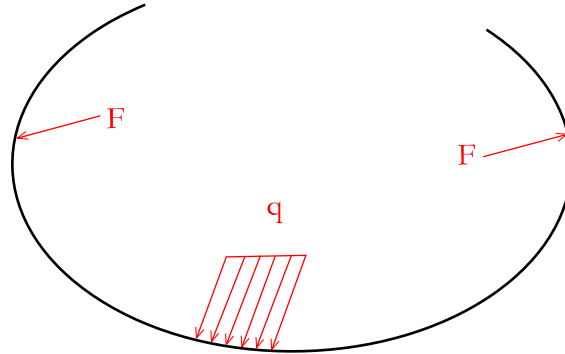
Obr. 5: Graf odchylek napětí v závislosti na poměru $R/b(d)$ kruhového rámu

Z daných výsledků lze konstatovat, že čím menší bude poměr $R/b(d)$ zakřiveného prutu, neboli čím více bude prut zakřivenější, tím větší chyby bychom se dopustili řešením prutu dle teorie slabě zakřivených prutů. Naopak pokud by byl poměr $R/b(d)$ sedm a vyšší (5% chyba je teoreticky přijatelná), lze si již výpočet zjednodušit použitím vztahů pro přímé pruty. Avšak musíme mít stále na paměti, že tímto zjednodušením se i tak dopustíme určité chyby.

3.1 Odvození rovnic pro silně zakřivený prut

Následující podkapitoly byly sepsány z těchto publikací [1],[2].

Pro odvození rovnic silně zakřivených prutů budeme uvažovat případ, kdy prut je prizmatický, přičemž příčný průřez bude mít osu symetrie ležící v rovině prutu. Taktéž budeme uvažovat střednici prutu jako rovinnou křivku a zatížení prutu rovinnou silovou soustavou, přičemž rovina působení silových účinků bude shodná s rovinou prutu (viz Obr. 6), tudíž prut bude namáhán kombinací ohybu, tahu/tlaku a smyku. Dále budeme u prutu uvažovat splnění prutových předpokladů.



Obr. 6: Zatížení rovinnou silovou soustavou v rovině prutu

Za těchto podmínek můžeme pro výpočet napětí od normálové síly N použít vztah (1). Jelikož nositelka posouvající síly T je totožná s osou symetrie ψ , můžeme pro výpočet smykových napětí τ od posouvající síly T použít Žuravského vztah (2).

$$\sigma_N = \frac{N}{S} \quad (1)$$

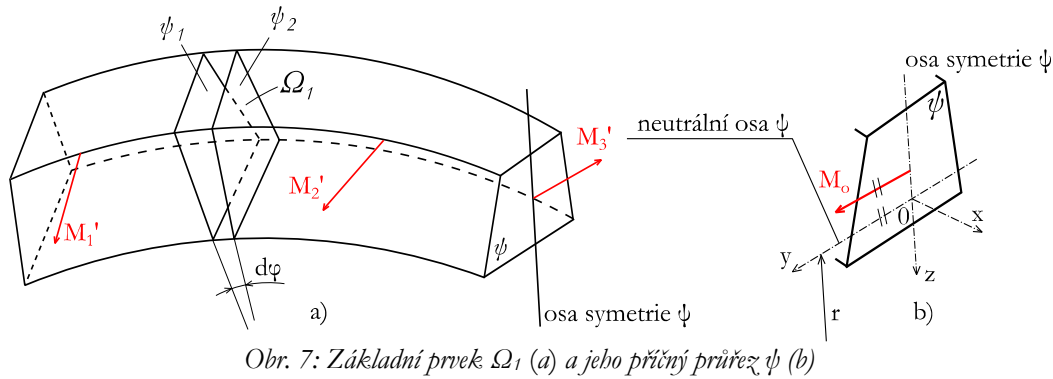
$$\tau(x, z) = \frac{T(x)U_y}{b(z)J_y} \quad (2)$$

Zbývá nám odvodit vztah pro výpočet ohybového napětí σ_o od ohybového momentu M_o . Pro řešení deformace silně zakřiveného prutu použijeme Castiglianovu větu, proto bude nutné odvodit i vztahy pro energii napjatosti silně zakřiveného prutu.

3.1.1 Ohybové napětí

Abychom mohli odvodit vztah pro výpočet ohybového napětí σ_o od ohybového momentu M_o , musíme kromě předpokladů uvedených v kapitole 3.1 uvažovat, že jediná nenulová složka VVÚ je ohybový moment M_o . Dále předpokládáme, že příčné průřezy se budou natáčet kolem osy ležící v příčném průřezu a budou se následně deformovat. A také, že pro řešení statické rovnováhy se prvek uvolňuje v nedeformovaném stavu.

Pro vyšetření délkových a úhlových přetvoření si musíme vyříznout z prutu základní prvek Ω , uvolněním dvěma příčnými průřezy ψ_1, ψ_2 , které jsou natočené od sebe o elementární úhel $d\varphi$, tak, jak je tomu na Obr. 7a. Jelikož předpokládáme splnění prutových předpokladů, můžeme očekávat, že se příčné průřezy natočí kolem neutrální osy ležící v příčném průřezu. Stanovíme si lokální souřadnicový systém v příčném průřezu tak, že osa x bude mít směr normály ψ , osa z bude totožná s osou symetrie ψ a jeho počátek bude mít v průsečíku osy z s neutrální osou y , viz Obr. 7b.

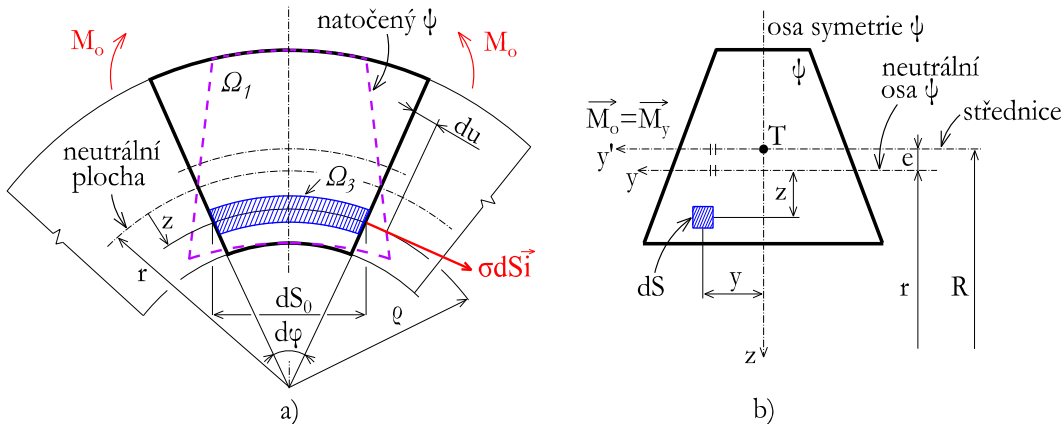
Obr. 7: Základní prvek Ω_1 (a) a jeho příčný průřez ψ (b)

Pro vyšetřované zatížení jsou nositelky M_o' kolmé na osu symetrie z , která je hlavní centrální osou (Obr. 7a). Z toho vyplývá, že nositelka M_o je druhou hlavní centrální osou y' a jde tedy o základní ohyb (Obr. 7b). Neutrální osa y pak bude rovnoběžná s osou y' a bude ležet v neutrální ploše, jejíž poloměr r zatím neznáme (Obr. 7b).

Při natočení příčných průřezů ψ_1 , ψ_2 se délka ds elementární prvku Ω_3 prodlouží o deformační posuv du (Obr. 8a). Tyto posuvy jsou při zachování rovinnosti ψ popsány rovnicí roviny

$$du = a_1 + b_1 y + c_1 z \quad (3)$$

Víme, že příčné průřezy se při zatěžování prutu od sebe nevzdalují, takže $a_1 = 0$. Jelikož neutrální osa y je rovnoběžná s hlavní centrální osou y' , budou se příčné průřezy natáčet pouze v rovině xz . Lze tedy říct, že i $b_1 = 0$. Jedinou neznámou nám tedy zůstává konstanta c .

Obr. 8: Deformační posuv natočených příčných průřezů (a) a příčný průřez v rovině xz (b)

Výpočet deformačního posuvu se zjednodušil na tvar:

$$du = cz \quad (4)$$

Délkové přetvoření délky ds_0 prvku Ω_3 bude:

$$\varepsilon_x(z) = \frac{du(z)}{ds_0(z)} \quad (5)$$

kde:

$$ds_0(z) = (r - z)d\varphi$$

Po dosazení dostaneme:

$$\varepsilon_x(z) = \varepsilon = \frac{cz}{(r-z)d\varphi} \quad (6)$$

Jelikož elementární úhel $d\varphi$ je velmi malý, můžeme jej zanedbat.

Výsledný tvar vztahu pro délkové přetvoření:

$$\varepsilon = c \frac{z}{r-z} \quad (7)$$

Pravé úhly prvku Ω_i zůstanou během zatěžování zachovány. Pak platí, že úhlová přetvoření γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} budou nulová.

Ze vztahu pro délkové přetvoření lze konstatovat, že průběh přetvoření na příčném průřezu ψ namáhaném ohybovým momentem M_o je hyperbolický s nulovou hodnotou v neutrální ose y . S využitím konstitutivních vztahů Hookovského materiálu $\sigma = E \cdot \varepsilon$ a $\tau = G \cdot \gamma$, kde E je modul pružnosti v tahu a G je modul pružnosti ve smyku lze psát:

$$\sigma_x(z) = \sigma = Ec \frac{z}{r-z} \quad (8)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Normálové napětí má na příčném průřezu hyperbolický průběh s nulovou hodnotou v neutrální ose y a smyková napětí jsou nulová. V bodech prvku vzniká jednoosá nehomogenní napjatost.

Vztahy pro napětí σ odvodíme jako funkci geometrických charakteristik příčného průřezu ψ a ohybového momentu M_o z podmínek statické ekvivalence v příčném průřezu ψ mezi elementárními plošnými silami $\sigma d\vec{S}_i$ a jejich staticky ekvivalentní výslednicí \vec{M}_o . Prvek Ω_3 uvolníme ze zakřiveného prutu v nedeformovaném stavu.

Pro silovou soustavu rovnoběžných sil $\sigma d\vec{S}_i$ existují tři podmínky statické ekvivalence (Obr. 8a,b):

$$\int_{\psi} \sigma dS = 0 \quad (9)$$

$$\int_{\psi} \sigma dS z = M_y$$

$$\int_{\psi} \sigma dS y = 0$$

Jelikož máme dvě neznámé (konstantu c a poloměr neutrální plochy r), budeme potřebovat pouze první dvě podmínky.

Po dosazení vztahu (8) do podmínek statické ekvivalence (9), získáme:

$$cE \int_{\psi} \frac{z}{r-z} dS = 0 \quad (10)$$

$$cE \int_{\psi} \frac{z^2}{r-z} dS = M_y \quad (11)$$

Poloměr neutrální plochy r lze odvodit ze vztahu (10). Z Obr. 8a lze vyčíst, že vzdálenost z můžeme zapsat ve tvaru $z = r - \rho$, kde ρ je poloměr křivosti po deformaci. Tento vztah obdržíme postupným upravením a dosazením (za předpokladu, že poloměr r je pro daný příčný průřez ψ konstantní) následovně:

$$\begin{aligned} \int_{\psi} \frac{z}{r-z} dS = 0 &\Rightarrow \int_{\psi} \frac{r-\rho}{r-(r-\rho)} dS = 0 \Rightarrow \int_{\psi} \left(\frac{r}{\rho} - 1\right) dS = 0 \Rightarrow \\ &r \int_{\psi} \frac{dS}{\rho} = \int_{\psi} dS \end{aligned}$$

Výsledný vztah poloměru neutrální osy r má tvar:

$$r = \frac{S}{\int_{\psi} \frac{dS}{\rho}} \quad (12)$$

Je také potřeba uvést, že tento vztah je pouze obecným vyjádřením poloměru neutrální plochy a je potřeba si pro daný profil dále odvodit jeho vztah.

Konstantu c určíme z rovnice (11). Bude za potřebí si tento vztah nejdříve upravit na tvar:

$$cE \left[- \int_{\psi} z dS + r \int_{\psi} \frac{z}{r-z} dS \right] = M_y \quad (13)$$

První integrál znázorňuje statický moment příčného průřezu ψ k neutrální ose. Potom vzdálenost neutrální plochy (osy) od těžiště příčného průřezu ψ můžeme označovat písmenem e (Obr. 8b) a lze psát:

$$\int_{\psi} z dS = -Se \quad (14)$$

kde vzdálenost neutrální plochy (osy) od těžiště příčného průřezu určíme z Obr. 8b a má tedy vztah:

$$e = R - r \quad (15)$$

Druhý integrál je vzhledem k rovnici (10) nulový. Vztah (13) pak můžeme upravit do tvaru:

$$cESe = M_y \Rightarrow c = \frac{M_y}{ESe} \quad (16)$$

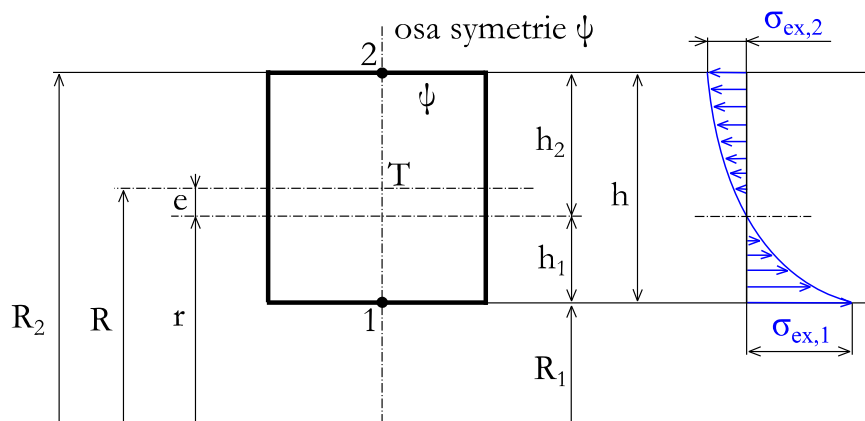
Nyní již známe konstantu c . Jejím zpětným dosazením do vztahů pro ohybové napětí σ_o (8) a délkového přetvoření ε (7) obdržíme jejich konečné tvary:

$$\sigma_o = \frac{M_y}{Se} \frac{z}{r-z} \quad (17)$$

$$\varepsilon = \frac{M_y}{ESe} \frac{z}{r-z}, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{M_y}{EJ_y} \frac{z}{r-z} \quad (18)$$

V příčném průřezu ψ vznikají dvě extrémní napětí (tahové a tlakové), a to v místech průsečíku osy symetrie ψ s obrysem ψ (body 1 a 2 na Obr. 9). Extrémní napětí na povrchu prutu jsou označeny na Obr. 9 a jsou dány vztahy:

$$\sigma_{ex,1} = \frac{M_y}{Se} \frac{h_1}{R_1}, \quad \sigma_{ex,2} = \frac{M_y}{Se} \frac{h_2}{R_2} \quad (19)$$



Obr. 9: Extrémní napětí σ_{ex}

O tom, zda bude v bodě 1 nebo 2 příčného průřezu ψ tahové napětí, záleží na smyslu působení ohybového moment M_o .

3.1.2 Energie napjatosti

Jak již bylo řečeno, bude-li rovinný zakřivený prut zatížen pouze silovými dvojicemi ležícími v rovině prutu, pak v příčném průřezu ψ působí pouze $M_o = M_y$. V ostatních případech rovinné silové soustavy, kdy zakřivený prut není zatížen jen silovými dvojicemi, vznikají v příčných průřezích tyto složky VVÚ: M_o , N , T_z .

Složku energie napjatosti v zakřiveném prutu o délce střednice γ od normálových napětí vyvolaných ohybovým momentem $M_o(s)$ a normálové síly $N(s)$ stanovíme pomocí vztahu:

$$\begin{aligned} W_\sigma &= \frac{1}{2E} \int_{(V)} \sigma^2 dV = \frac{1}{2E} \int_{(V)} (\sigma_o + \sigma_N)^2 dV \Rightarrow \\ W_\sigma &= \frac{1}{2E} \int_{(V)} (\sigma_o^2 + 2\sigma_o\sigma_N + \sigma_N^2) dV \end{aligned} \quad (20)$$

Dosadíme-li do rovnice (20) za σ_o vztah (17) a za σ_N vztah (1), získáme vztah pro energii napjatosti od normálových napětí. Pro přehlednost vztahů si jednotlivé složky energie napjatosti rozepíšeme samostatně

$$W_\sigma = W_{\sigma_1} + W_{\sigma_2} + W_{\sigma_3}$$

$$\begin{aligned} W_{\sigma_1} &= \frac{1}{2E} \int_{(V)} \sigma_o^2 dV = \frac{1}{2E} \int_\gamma \int_\psi \frac{M_o^2}{S^2 e^2} \frac{z^2}{(r-z)^2} dS ds_0 \\ W_{\sigma_2} &= \frac{1}{E} \int_{(V)} \sigma_o \sigma_N dV = \frac{1}{E} \int_\gamma \int_\psi \frac{M_o z}{S e(r-z)} \frac{N}{S} dS ds_0 \\ W_{\sigma_3} &= \frac{1}{2E} \int_{(V)} \sigma_N^2 dV = \frac{1}{2E} \int_\gamma \int_\psi \frac{N^2}{S^2} dS ds_0 \end{aligned}$$

Délku vlákna ds_o ve vzdálenosti z od neutrální osy prvku Ω , dle Obr. 8a vyjádříme pomocí délky dS střednice prutu takto.

$$\frac{ds_o}{dS} = \frac{\rho}{R} = \frac{r-z}{R} \Rightarrow ds_o = \frac{r-z}{R} dS$$

Dosazením a úpravou získáme výsledné složky energie napjatosti. Při odvození využijeme vztah (11) a jeho úpravy.

$$\begin{aligned}
 W_{\sigma_1} &= \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \left(\int_{\psi} \frac{M_0^2}{S^2 e^2} \frac{z^2}{(r-z)^2} \frac{r-z}{R} dS \right) dS \Rightarrow \\
 W_{\sigma_1} &= \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{M_0^2}{S^2 e^2 R} \left(\int_{\psi} \frac{z^2}{(r-z)} dS \right) dS \Rightarrow W_{\sigma_1} = \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{M_0^2}{S e R} dS \\
 W_{\sigma_2} &= \frac{1}{E} \int_{\gamma} \left(\int_{\psi} \frac{M_0 z}{S e (r-z)} \frac{N}{S} \frac{r-z}{R} dS \right) dS \Rightarrow \\
 W_{\sigma_2} &= \frac{1}{E} \int_{\gamma} \frac{M_0 N}{S^2 e R} \left(\int_{\psi} z dS \right) dS \Rightarrow W_{\sigma_2} = -\frac{1}{E} \int_{\gamma} \frac{M_0 N}{S R} dS \\
 W_{\sigma_3} &= \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \left(\int_{\psi} \frac{N^2}{S^2} \frac{r-z}{R} dS \right) dS \Rightarrow \\
 W_{\sigma_3} &= \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{N^2}{S^2 R} \left(\int_{\psi} (r-z) dS \right) dS \Rightarrow W_{\sigma_3} = \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{N^2}{S} dS
 \end{aligned}$$

Další složkou energie napjatosti v zakřiveném prutu je složka od smykových napětí vyvolaných posouvající silou $T(s)$ a má tvar:

$$W_{\tau} = \frac{\beta T^2(s) dS}{2GS(s)} \quad (21)$$

Energie napjatosti v zakřiveném prutu od účinků $M_o(s)$, $N(s)$ a $T(s)$ je

$$W = W_{\sigma} + W_{\tau}$$

Neboli:

$$W = \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{M_0^2}{S e R} dS - \frac{1}{E} \int_{\gamma} \frac{M_0 N}{S R} dS + \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{N^2}{S} dS + \int_{\gamma} \frac{\beta T^2 dS}{2GS} \quad (22)$$

3.2 Odvození rovnic pro slabě zakřivený prut

Pro získání rovnic vyjdeme z již odvozených rovnic pro silně zakřivený prut. Očekáváme, že všechny předpoklady, které platily pro silně zakřivený prut, budou platit i pro slabě zakřivený prut. Taktéž vztahy (1) a (2) lze použít.

3.2.1 Ohybové napětí

Rozdíl mezi slabě a silně zakřiveným prutem, jak už bylo zmíněno, je v poměru R/h , kde R je poloměr zakřivení střednice a h je výška profilu. Pro slabě zakřivený prut tedy uvažujeme, že $R/h > 7$. V tomto případě můžeme uvažovat, že poloměr zakřivení před deformací R a po deformaci ρ budou přibližně stejně velké, tedy:

$$R \doteq \rho \doteq r - z \quad (23)$$

Pokud tento předpoklad zavedeme do vztahu pro délkové přetvoření (7) dostaneme vztah:

$$\varepsilon = c \frac{z}{R} \quad (24)$$

Z délkového přetvoření při uvažování platnosti Hookova zákona můžeme opět odvodit vztah pro ohybové napětí:

$$\sigma_o = Ec \frac{z}{R} \quad (25)$$

Jelikož podmínky statické ekvivalence (9) stále platí, dosadíme do nich vztah (25), čímž získáme:

$$\frac{cE}{R} \int_{\psi} z^2 dS = M_y \quad (26)$$

Lze vidět, že proti silně zakřivenému prutu nám odpadlo řešení poloměru neutrální osy r , což zapříčinil předpoklad, že poloměr zakřivení před deformací R a po deformaci ρ je přibližně stejně velký. Je tedy potřeba vyřešit pouze konstantu c , proto nám stačí pouze jedna podmínka statické ekvivalence.

Jelikož je známo, že:

$$\int_{\psi} z^2 dS = J_y$$

kde J_y je osový kvadratický moment.

Zpětným dosazením do vztahu (26) dostaneme výsledný vztah pro konstantu c :

$$c = \frac{M_y R}{E J_y} \quad (27)$$

Následným opětovným dosazením, nyní do vztahu (25), získáme konečný vztah pro ohybové napětí:

$$\sigma_o = \frac{M_y}{J_y} z \quad (28)$$

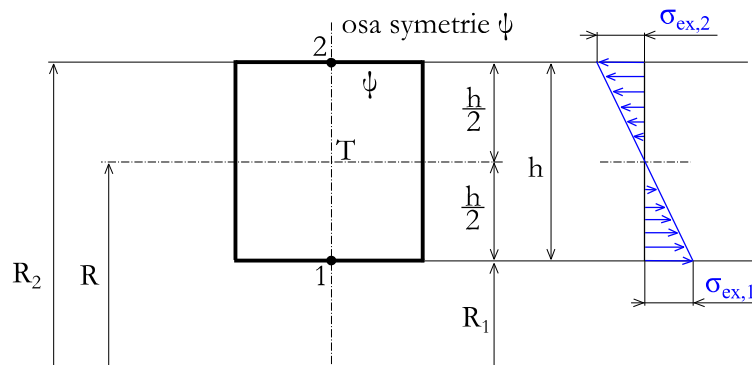
Případně dosazením vztahu (27) do rovnice (24) získáme konečný vztah pro délkové přetvoření:

$$\varepsilon_x = \frac{M_y}{EJ_y} z, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{M_y}{EJ_y} z \quad (29)$$

Z konečných vztahů pro ohybové napětí a délkové přetvoření lze zpozorovat, že se shodují se vztahy pro přímé pruty a průběh napětí i přetvoření bude tedy lineární.

Extrémní napětí budou tedy stejná, a to v místech průsečíku osy symetrie ψ s obrysem ψ (body 1 a 2 na Obr. 10). Extrémní napětí na povrchu prutu jsou označena na Obr. 10 a jsou dány vztahy:

$$\sigma_{ex,1} = -\frac{M_y}{J_y} \frac{h}{2}, \quad \sigma_{ex,2} = \frac{M_y}{J_y} \frac{h}{2} \quad (30)$$



Obr. 10: Extrémní napětí σ_{ex}

3.2.2 Energie napjatosti

Odvození vztahů pro energii napjatosti pro slabě zakřivený prut je analogické s odvozením vztahů pro energii napjatosti silně zakřiveného prutu (viz kap. 3.1.2). Jedinou změnou lze popsat, že u slabě zakřivených prutů je přírůstek úhlu natočení $\Delta d\phi_N$ od normálové síly zanedbatelný. Tedy:

$$W_{\sigma_2} = \frac{1}{E} \int_{\gamma} \frac{M_o N}{J_y S} \left(\int_{\psi} z dS \right) dS = \frac{1}{E} \int_{\gamma} \frac{M_o N}{J_y} dS = 0$$

Energie napjatosti u slabě zakřiveného prutu je tedy s uvážením ohybového momentu M_o , normálové síly N a posouvající síly T rovna:

$$W = \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{M_o^2}{J_y} dS + \frac{1}{2E} \int_{\gamma} \frac{N^2}{S} dS + \int_{\gamma} \frac{\beta T^2 dS}{2GS} \quad (31)$$

3.3 Koeficient smyku β

Jak si lze všimnout, ve vztahu (21) a (31) figuruje krom jiných proměnná β . Jedná se o koeficient smyku, resp. tvarový koeficient (nebo též součinitel nerovnoměrnosti [3]), který vyplývá (při tom nejjednodušším odvození) z úplného odvození energie napjatosti od posouvající síly. Je třeba poukázat, že následující odvození jsou odvození na nejnižší úrovni.

Obecný předpis výpočtu koeficientu smyku β má tvar:

$$\beta = \int_{\psi} \frac{S U_{y\psi 1}^2(z)}{b^2(z) J_y^2} d\psi \quad (32)$$

kde $U_{y\psi 1}$ je lineární moment oblasti ψ .

Je tedy zřejmé, že různé příčné průřezy budou mít různou hodnotu β . Odvodíme si hodnotu koeficientu smyku β pro obdélníkový průřez.

3.3.1 Obdélníkový průřez

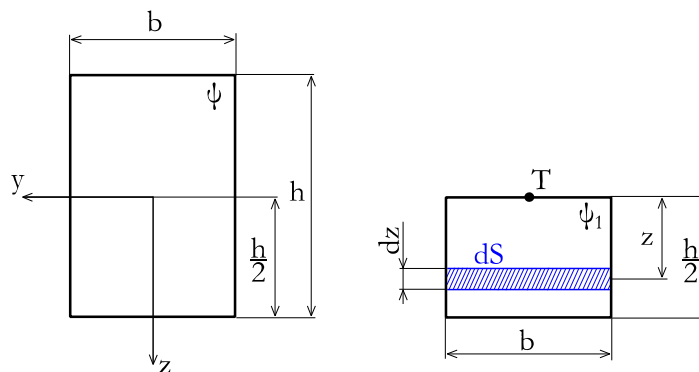
Pro odvození koeficientu smyku β využijeme obecný vztah (32). Budeme potřebovat určit plochu průřezu S , lineární moment $U_{y\psi 1}(z)$ oblasti ψ , šířku příčného průřezu $b(z)$ a osový kvadratický moment J_y oblasti ψ .

Plocha příčného průřezu S

$$S = bh$$

Osový kvadratický moment J_y

$$J_y = \frac{bh^3}{12}$$



Obr. 11: Obdélníkový průřez

Z Obr. 11 určíme šířku průřezu $b(z)$ v oblasti ψ :

$$b(z) = b$$

Poslední proměnná, která nám zbývá určit, je lineární moment $U_y(z)$ v oblasti ψ . Víme, že:

$$U_y(z) = \int_S z dS$$

Taktéž pomocí Obr. 11 můžeme říct, že elementární prvek $dS = b dz$. Potom:

$$U_y(z) = b \int_z^{\frac{h}{2}} z dz$$

Po integraci dostaneme výsledný tvar lineárního momentu $U_y(z)$:

$$U_y(z) = \frac{b}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right)$$

Nyní už můžeme dosadit do vztahu (32) a postupně upravit.

$$\beta = \int_{\psi} \frac{bh \left(\frac{b}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right) \right)^2}{b^2 \frac{b^2 h^6}{144}} d\psi$$

Následně tento vztah zintegrujeme a upravíme.

$$\beta = \int_{\psi} \frac{\left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2}{\frac{b h^5}{36}} d\psi$$

Nahradíme-li $d\psi = b dz$, pak:

$$\beta = \frac{36}{h^5} \int_z \frac{\left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2}{b} b dz$$

Jelikož do integrálu dosadíme jako meze pouze oblast ψ , tedy pouze polovinu příčného průřezu, musíme celý integrál vynásobit dvěma.

$$\beta = \frac{72}{h^5} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)^2 dz$$

$$\beta = \frac{72}{h^5} \int_0^{\frac{h}{2}} \left(\frac{h^4}{16} - 2 \frac{h^2}{4} z^2 + z^4 \right) dz$$

$$\beta = \frac{72}{h^5} \left(\frac{h^4}{16} z - 2 \frac{h^2}{4} \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} \right)_0^{\frac{h}{2}}$$

$$\beta = \frac{72}{h^5} \left(\frac{8h^5}{480} \right)$$

Výsledná hodnota koeficientu smyku β pro obdélníkový průřez

$$\beta_{ob} = \frac{6}{5} = 1,2 \quad (33)$$

3.3.2 Kruhový průřez

Odvození koeficientu smyku β pro kruhový průřez je obdobné jako odvození pro obdélníkový průřez. Proto se jeho odvozením nebudeme dále zabývat.

$$\beta_{kr} = \frac{32}{27} \quad (34)$$

3.3.3 Další varianty výpočtu

Je potřeba říci, že mnoho vědců se snažilo poskytnout přesné výrazy koeficientu smyku β . Existují tedy různé varianty, které lze v praxi použít. V inženýrské praxi se nejčastěji používá výraz odvozený Stephenem Timoshenkem [4], ve kterém je zahrnuto i Poissonovo číslo.

Pro obdélníkový průřez má vztah tvar:

$$\kappa_{ob} = \frac{12 + 11\mu}{10(1 + \mu)}$$

Pro kruhový průřez má vztah tvar:

$$\kappa_{kr} = \frac{7 + 6\mu}{6(1 + \mu)}$$

, což pro Poissonovo číslo $\mu = 0$ znamená:

$$\kappa_{ob} = \frac{6}{5} = 1,2 \quad \kappa_{kr} = \frac{7}{6}$$

Pokud bychom uvažovali materiál s nulovým Poissonovým číslem, dostali bychom u obdélníkového průřezu stejnou hodnotou tvarového součinitele jako v kapitole 3.3.1. U kruhového průřezu se již hodnota trochu liší. Taktéž se hodnoty budou lišit při výpočtu materiálu s nenulovým Poissonovým číslem. Odchyly jsou však malé, proto je nebudeme uvažovat a budeme dále počítat s hodnotami β .

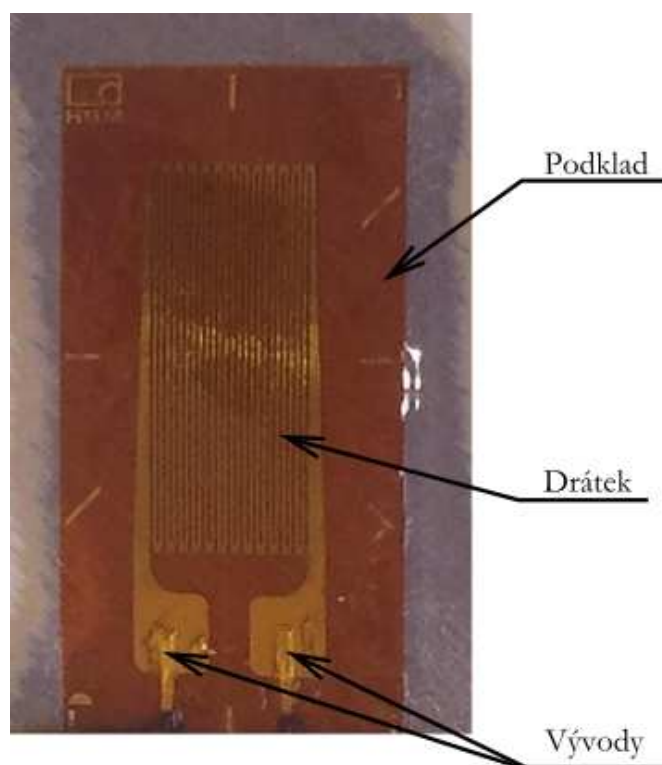
4 Experimentální metody

4.1 Odporová tenzometrie

Odporový tenzometr lze také nazvat jako odporový senzor, který využívá tzv. piezorezistivní jev. Tento jev můžeme popsat tak, že při působení vnějšího zatížení na těleso se pružně deformuje jeho krystalická mřížka, s čímž souvisí i změna měrného elektrického odporu. Pružnou deformací rozumíme takovou deformaci, při níž materiál nepřekročí mez kluzu R_e , tedy se pohybujeme v mezích platnosti Hookova zákona.

V praxi se tenzometr nalepí na měřené místo daného tělesa a následně se těleso zatíží. Tím dojde jak k deformaci tělesa, tak i tenzometru, čímž se změní jeho geometrické rozměry i krystalická mřížka, což zapříčiní změnu odporu. Tento odpor jsme již schopni změřit a jsme jej schopni přepočítat na přetvoření. Následným použitím Hookova zákona, za předpokladu znalosti Youngova modulu pružnosti a popř. Poissonova čísla materiálu tělesa, můžeme dopočítat napětí v měřeném místě.

Odporové tenzometry jsou kompletovány z odporových drátků, které jsou nalepeny ve tvaru mnohonásobné vlásenky na tenký podklad. Konce drátku jsou připájeny na tlustší vývody (viz Obr. 12).

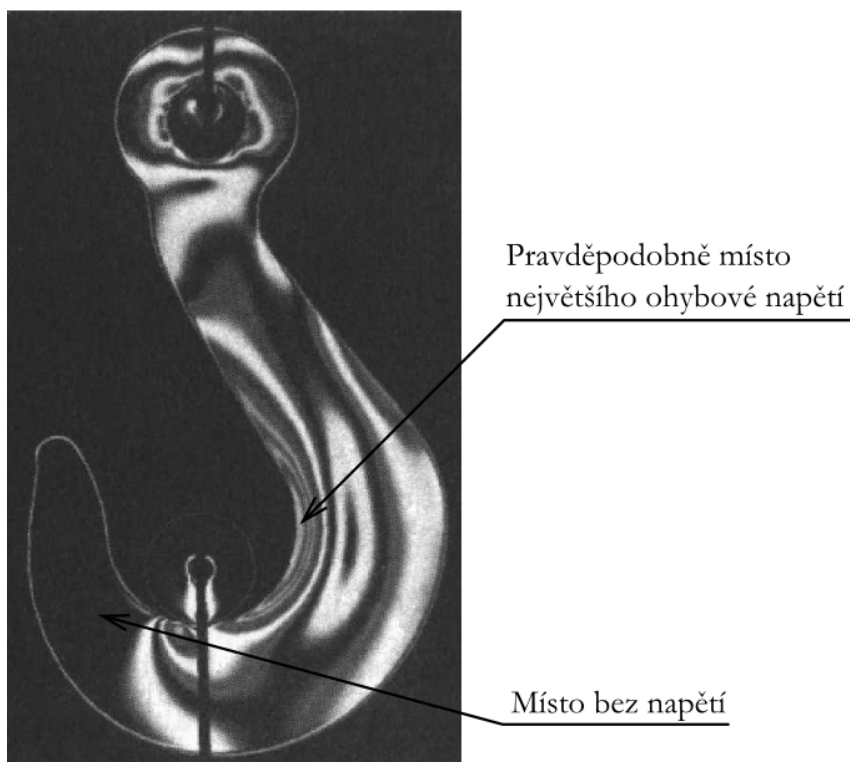


Obr. 12: Schéma odporového tenzometru [5]

4.2 Fotoelasticimetrie

Jedná se o experimentální metodu, která slouží k určení stavu napětí v elasticky deformovaném materiálu při rovinném napětí. Využívá polarizované světlo, které prochází skrz deformovaný model (model musí být ze speciálního materiálu) do analyzátoru, ke snímači. Snímač sleduje skrz analyzátor deformovaný model a zobrazuje tzv. izochromaty. Pokud se použije bílé světlo, jsou izochromaty odděleny od barevného spektra vytvořeném na deformovaném modelu. Jako křivky černé barvy se vždy zobrazují izoklíny. Pro určení napjatosti v modelu jsou izoklíny a izochromaty velmi důležité.

Tato metoda byla objevena D. Brewsterem roku 1816. Byla používána především před vyvinutím výpočetních metod pro zjištění rozložení napětí v tělesech. Nejčastěji se používá u rovinných těles, dá se však použít i pro prostorová tělesa. V současnosti bývá používána pro ověření výpočtů MKP nebo při některých speciálních aplikacích, jako je například určení reziduálních napětí v rychle tuhnuících sklech.



Obr. 13: Vyhodnocení napjatosti v háku vázacího řetězu pomocí fotoelasticimetrie [6]

5 Využití MKP

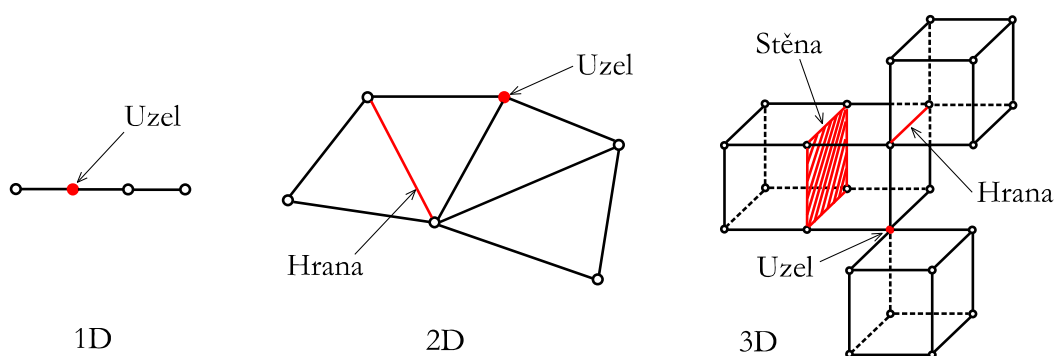
Metoda konečných prvků jako taková je již známá desítky let. Její první publikace ve spojení s numerickými metodami v oblasti inženýrských výpočtů se datuje do roku 1956, přestože některé myšlenky algoritmu MKP byly publikovány mnohem dříve. Až v poslední době se díky rozvoji informačních technologií tato metoda stává použitelnou. Existuje mnoho komerčních softwarů, přes které lze řešit inženýrské výpočty metodou konečných prvků. Jako nejvýznamnější lze uvést ANSYS, NASTRAN, ADINA a ABAQUS.

Pokud bychom se podívali do pozadí výpočtu všech zmíněných softwarů, našli bychom jednoduchou rovnici:

$$KU = F$$

Řeší se systém lineárních rovnic, kde K je globální matice tuhosti, U je vektor neznámých koeficientů (posuvy uzlových bodů, z kterých dále počítáme napětí atd.) a F představuje vnější zatížení (síly v jednotlivých uzlech).

V MKP rozdělíme vyšetřovanou oblast na geometricky jednoduché podoblasti s jednoduchými hranicemi. Bázovými funkcemi jsou polynomy, které jsou určovány právě na těchto geometricky jednoduchých podoblastech. Nosič geometricky jednoduché podoblasti, na které je bázovou funkcí polynom, nazýváme prvek. K zajištění spojitosti funkčních hodnot se prvky mohou stýkat buď pouze v uzlech (pro 1D úlohy), v uzlech a hranách (2D úlohy), v uzlech, hranách a stěnách (3D úlohy) viz Obr. 14.



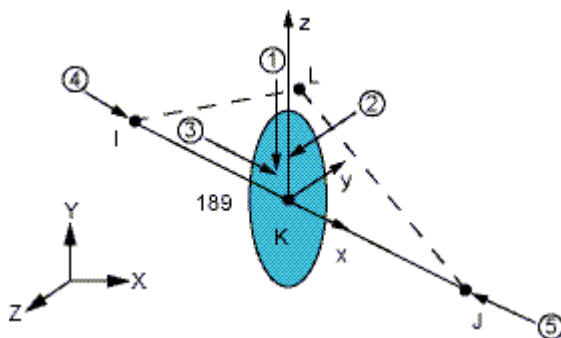
Obr. 14: Spojitost prvků v MKP

Jak již bylo řečeno, MKP vyžaduje rozdělení řešené oblasti na konečný počet podoblastí, tedy prvků. Je proto potřebné vytvořit na modelu tělesa tzv. síť konečných prvků. V dnešní době existuje již velké množství typů prvků, z nichž v práci jsou použity prvky BEAM 189, PLANE 183, SOLID 186, CONTA 174 a TARGE 170.

5.1 Vybrané prvky

BEAM 189

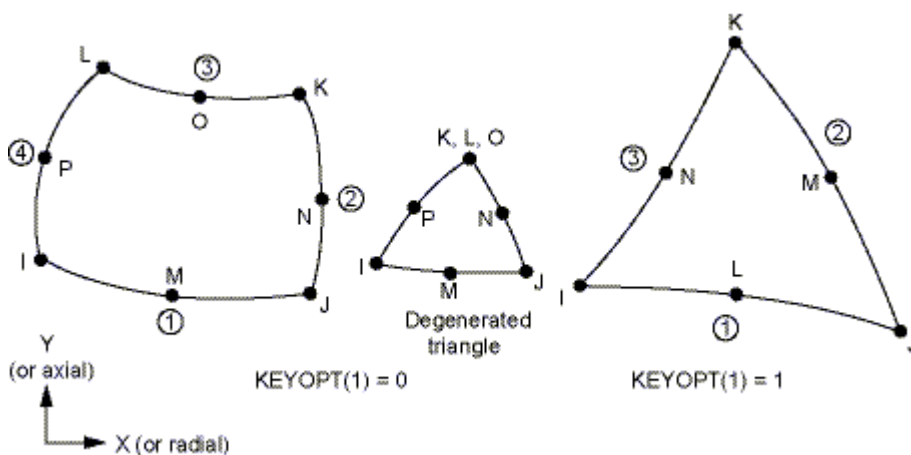
Jedná se o kvadratický tří-uzlový 3D prvek, který se nejčastěji používá u prutových konstrukcí. V každém uzlu má šest stupňů volnosti, mezi které patří posuvy v osách x , y , z a natočení taktéž okolo těchto os. Sedmý stupeň volnosti je volitelný. Prvek je vhodný pro řešení lineárních úloh, velkých rotací nebo nelineárních úloh s velkým přetvořením. Prvek dále podporuje plasticitu, creep a další nelineární chování materiálu. Více informací viz ANSYS HELP [7].



Obr. 15: Geometrie prvku BEAM189 [7]

PLANE 183

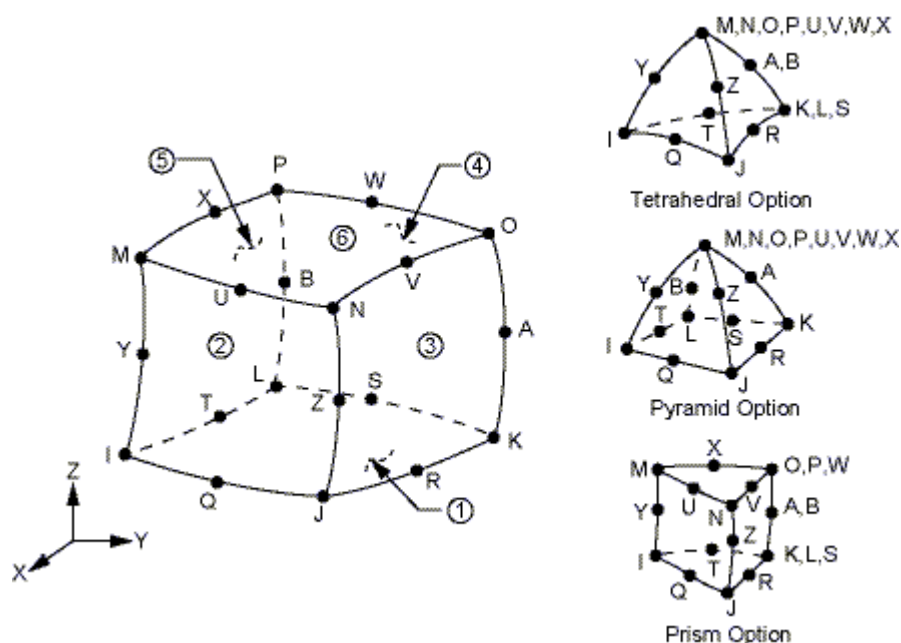
Tento prvek je kvadratický a je definován pomocí osmi nebo šesti uzlů. V každém uzlu jsou dva stupně volnosti, posuvy v osách x a y . Může být použit jako rovinný prvek (rovinná napjatost, rovinná deformace) nebo jako prvek axisymetrický. Prvek dále podporuje plasticitu, hyperelasticitu, creep, velké deformace a velké možnosti přetvoření. Je vhodný pro modelování nepravidelných sítí. Více informací viz ANSYS HELP [7].



Obr. 16: Geometrie prvku PLANE 183 [7]

SOLID 186

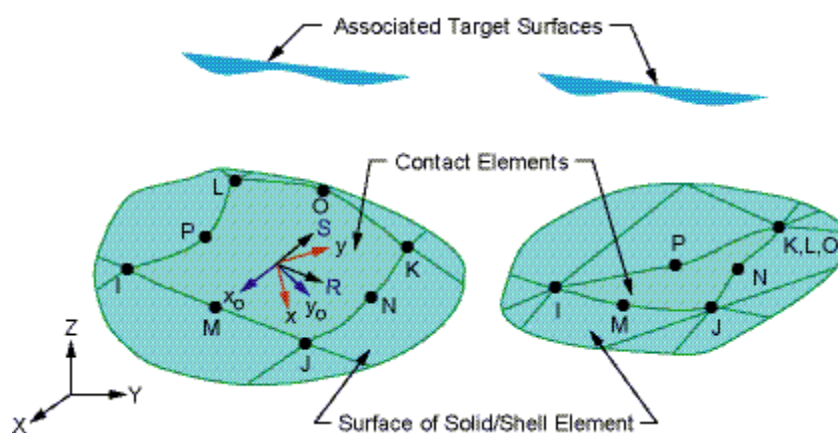
SOLID 186 je kvadratický 3D dvaceti uzlový objemový prvek. Každý z dvaceti uzlů prvku má tři stupně volnosti, posuvy v osách x , y , z . Prvek podporuje plasticitu, hyperelasticitu, creep, velké deformace a velké možnosti přetvoření. Je vhodný pro modelování nepravidelných sítí. Více informací viz ANSYS HELP [7].



Obr. 17: Homogenní strukturální geometrie prvku SOLID 186 [7]

CONTA 174

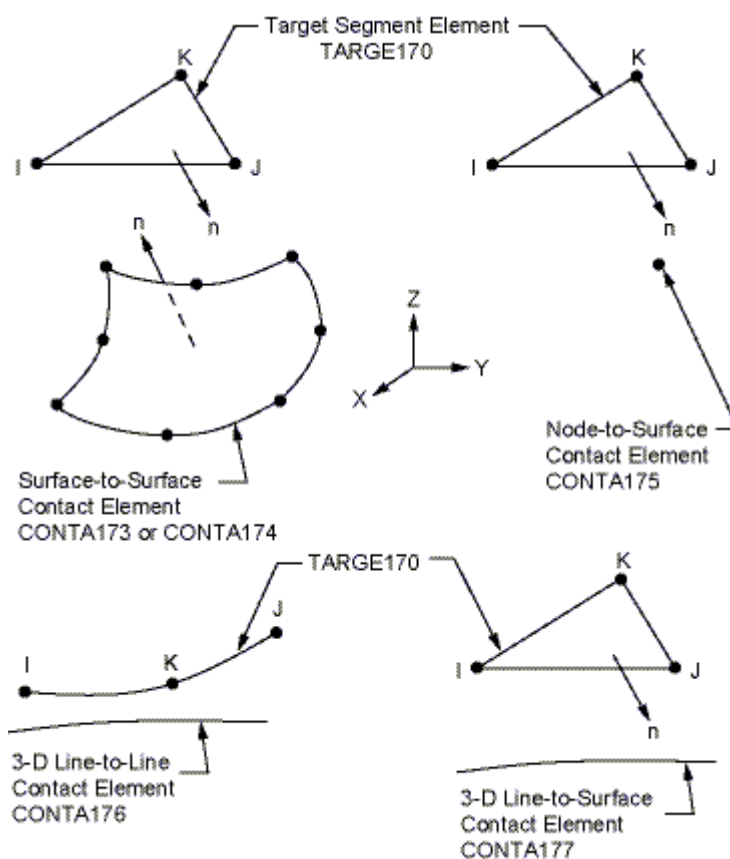
CONTA 174 se používá pro reprezentaci mezi prostorovým „cílovým“ povrchem (TARGE 170) a deformovatelným povrchem definovaným tímto prvkem. Prvek je aplikovatelný na prostorové struktury a spojená pole kontaktních analýz. Prvek je umístěn na povrchu 3D prvku (SOLID nebo SHELL) s uzly uprostřed hran. Ke kontaktu dochází, když povrch prvku CONTA174 pronikne do povrchu prvku TARGE 170. Více informací viz ANSYS HELP [7].



Obr. 18: Geometrie prvku CONTA 174 [7]

TARGE 170

TARGE 170 se používá k reprezentaci různých prostorových „cílových“ povrchů pro přidružené kontaktní prvky (např. CONT 174). Kontaktní prvky samy překryjí prostorové, skořepinové nebo liniové prvky popisující hranici deformovatelného tělesa a jsou potenciálně v kontaktu s cíleným povrchem definovaným prvkem TARGE 170. Tento cílový povrch je diskretizován souborem prvků (TARGE 170) a spárován s přidruženou kontaktní plochou. Více informací viz ANSYS HELP [7].



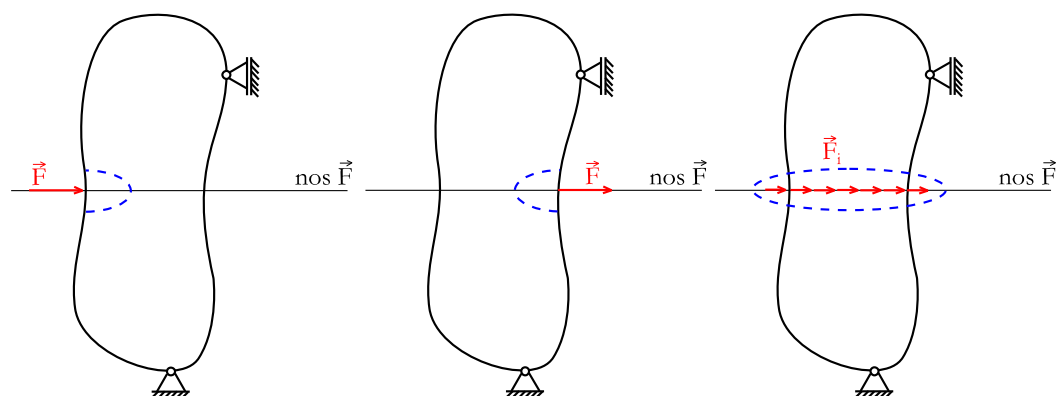
Obr. 19: Geometrie prvku TARGE 170 [7]

5.2 Degradace sítě

Nechť máme vytvořený výpočtový model. Jestliže tento model zatížíme silou do bodu (uzlu) v podmínkách rovinné napjatosti (plane stress) nebo na hranu u objemového tělesa, dojde k degradaci sítě, tedy k uměle vytvořené lokální koncentraci, což výrazně ovlivní výsledné hodnoty v oblasti působení síly.

Taktéž pokud model zatížíme silou na hranu v podmínkách rovinné napjatosti nebo na stěnu u objemového tělesa, dojde k lokální koncentraci, jelikož každá osamělá síla, i když „rozprostřená“, způsobuje lokální koncentraci. To znamená, že v tomto případě snížíme lokální koncentraci v bodě blízko vnitřnímu povrchu, nicméně do každého bodu (uzlu) jsme tento koncentrátor vnesli znovu.

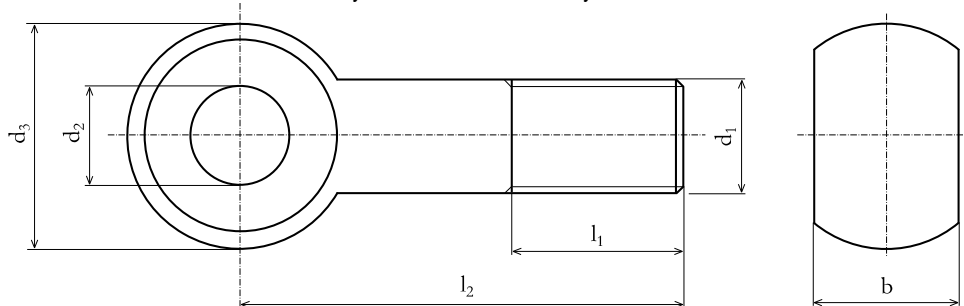
Díky znalosti statiky můžeme říct, že síla je charakterizována jako volný vektor, který lze posouvat po nositelce. Avšak pouze z hlediska statické rovnováhy. Z hlediska deformačně napět'ové analýzy nelze již sílu libovolně posouvat a ze síly se stává vázaný vektor. Čárkovaná čára charakterizuje oblast, která je ovlivněna zvoleným zatížením viz Obr. 20.



Obr. 20: Ovlivněná oblast působením síly F

6 Šroub s okem

Šroubu s okem náleží norma DIN 444 [8]. Tyto šrouby se používají nejčastěji při montáži a spojování různých částí strojů. Vyrábí se z nerezové oceli AISI 303, která umožňuje díky své vysoké odolnosti proti korozi použití ve strojích a zařízeních, kde je vyžadováno z hygienických, klimatických a ekologických důvodů použití právě tohoto materiálu. Dále se šrouby s okem mohou vyrábět z nízkouhlíkové oceli.



Obr. 21: Schéma šroubu s okem [8]

Byl vybrán šroub s okem dle normy DIN444 s následujícími rozměry, zatížen silou F :

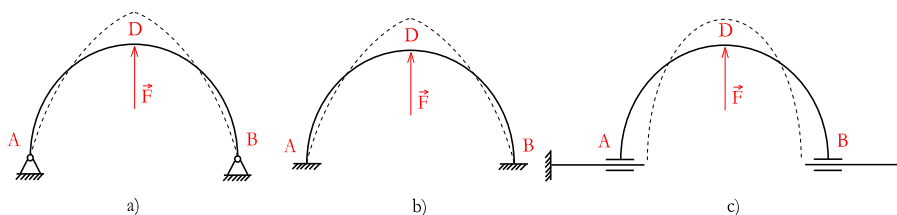
d_1	l_1	l_2	d_2	d_3	b	F
[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]	[N]
M20	46	100	18	40	22	10000

Tab. 2: Rozměry šroubu s okem dle normy DIN444 [8]

6.1 Analytický přístup

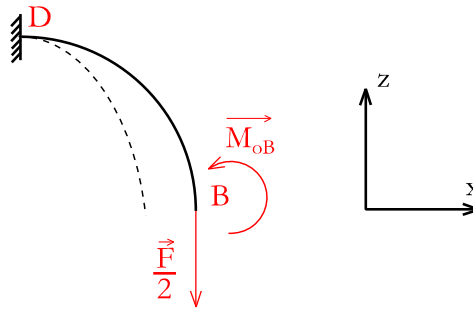
Součástí s okem existuje velmi mnoho. Může to být např. ojnice, táhlo, hydraulická pístnice, napínák, aj. Byl vybrán šroub s okem, avšak zajímá nás pouze oko součásti, jelikož se práce soustředí na porovnání hodnot zakřivených částí. Šroub s okem byl tedy vybrán pouze pro získání potřebných geometrických charakteristik. Dřík, který k oku šroubu náleží, není u analytického řešení uvažován, jelikož zde nejsou splněny prutové předpoklady. U numerického řešení je dřík vymodelován, ale pouze velmi zjednodušeně a jeho chování nás nezajímá. Byla zjednodušena i geometrie oka, jelikož není po celé délce příčného průřezu obdélníková, jak je možné si všimnout na Obr. 21. Tato geometrie by vedla ke složitým výpočtům, zjednodušíme si ji tedy na obdélníkový příčný průřez.

Výpočtový model analytického řešení se bude skládat pouze z poloviny oka. Zde nastává problémová situace, jak zavazbit zbylou polovinu oka, neboli jaký výpočtový model zvolit. Různé varianty výpočtových modelů jsou zobrazeny na Obr. 22. Přerušovanou čarou je znázorněna předpokládaná deformace oka. Jelikož existuje předpoklad, že se oko bude v místě působení síly natahovat a v řezu A-B zužovat, jeví se za správný výpočtový model c), protože u zbylých dvou modelů a) a b) je zamezen v tomto řezu posuv. Dále tedy budeme uvažovat model c).



Obr. 22: Výpočtové modely oka šroubu

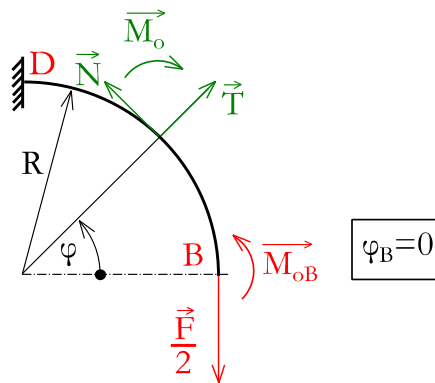
Jelikož máme k dispozici jednu osu symetrie (osu z), využijeme ji, čímž si zjednodušíme úlohu o jeden stupeň statické neurčitosti.



Obr. 23: Výsledný výpočtový model oka šroubu

Dostáváme se k výslednému výpočtovému modelu oka šroubu, se kterým budeme následně počítat. Model je jedenkrát staticky neurčitý, protože neznáme hodnotu ohybové momentu M_{oB} . Tu určíme pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty a deformační podmínky.

Pro určení složek vnitřních výsledných účinků budeme vycházet z Obr. 24.



Obr. 24: Vnitřní výsledné účinky šroubu s okem

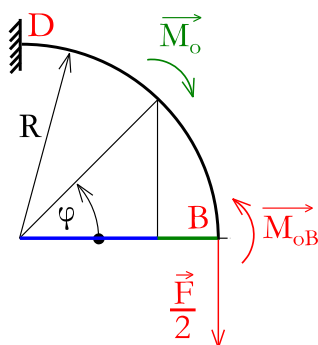
Normálovou složku N výsledných vnitřních účinků určíme následujícím způsobem. Z Obr. 24 vyplývá, že hodnota normálové složky bude maximální při $\varphi = 0$ a nulová při $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Takto je charakterizována funkce cosinus a tedy:

$$N = \frac{F}{2} \cos(\varphi) \quad (35)$$

Složku posouvající síly T určíme obdobným způsobem, pak:

$$T = \frac{F}{2} \sin(\varphi) \quad (36)$$

Určení složky ohybového momentu M_o je trochu složitější. Jak je vidět na Obr. 25, potřebujeme určit ohybový moment zelené čáry.



Obr. 25: Určení ohybového momentu šroubu s okem

Základem je ohybový moment M_{oB} v bodě B. Pro získání ohybového momentu zelené čáry vezmeme ohybový moment vyvolaný silou po celé délce poloměru zakřivení R (sečtením modré a zelené čáry) a odečteme od něj ohybový moment na části poloměru zakřivení označeném modrou čarou. Velikost modré čáry určíme obdobným způsobem jako normálovou a posouvající sílu. Řekneme-li si, že ohybový moment vyvolaný silou bude maximální při $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a nulový při $\varphi = 0$, víme, že se jedná o funkci cosinus, pak lze psát:

$$M_o = M_{oB} - \frac{F}{2}R + \frac{F}{2}R \cos(\varphi)$$

,což lze také zapsat jako:

$$M_o = M_{oB} - \frac{F}{2}R (1 - \cos(\varphi)) \quad (37)$$

6.1.1 Řešení pomocí teorie silně zakřivených prutů

Neznámou složkou VVÚ je ohybový moment M_{oB} , který zjistíme pomocí Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty. Uvažujeme deformační podmínku, že natočení v bodě B bude nulové ($\varphi_B = 0$). Využijeme vztah energie napjatosti pro silně zakřivený prut (22).

$$\begin{aligned}\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_{oB}} &= \int_{\gamma} \frac{M_o}{ESeR} \frac{\partial M_o}{\partial M_{oB}} dS - \int_{\gamma} \left[\frac{M_o}{ESR} \frac{\partial N}{\partial M_{oB}} + \frac{N}{ESR} \frac{\partial M_o}{\partial M_{oB}} \right] dS \\ &\quad + \int_{\gamma} \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial M_{oB}} dS + \int_{\gamma} \frac{\beta T}{GS} \frac{\partial T}{\partial M_{oB}} dS \\ 0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{oB} - \frac{F}{2} R (1 - \cos(\varphi))}{ESeR} 1 R d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F \cos(\varphi)}{2ESR} 1 R d\varphi\end{aligned}$$

Po úpravě s využitím softwaru Maple 17 získáme vztah:

$$M_{oB} = \frac{FR}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2e}{\pi R} \right) \quad (38)$$

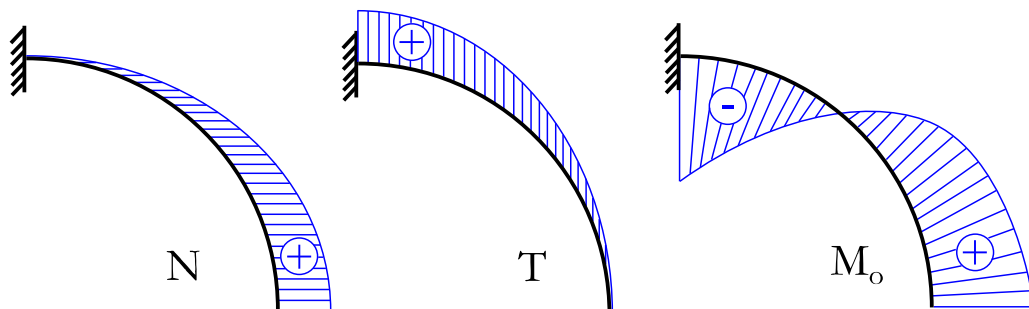
Dosadíme-li ohybový moment M_{oB} do vztahu (37), dostaneme:

$$M_o = \frac{FR}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2e}{\pi R} \right) - \frac{FR}{2} (1 - \cos(\varphi))$$

,což je po úpravě:

$$M_o = \frac{FR}{2} \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} + \cos(\varphi) \right) \quad (39)$$

Výsledné vnitřní účinky budou mít průběh po délce střednice dle Obr. 26.



Obr. 26: Výsledné vnitřní účinky oka šroubu

Jelikož budeme vyhodnocovat nebezpečné řezy, kterými jsou body B a D, určíme si v nich ohybové momenty. V bodě B již vztah pro ohybový moment M_{oB} známe, je jím vztah (38). Ohybový moment v bodě D určíme ze vztahu (39) pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$, který bude mít tvar:

$$M_{oD} = \frac{FR}{2} \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} \right) \quad (40)$$

Dále je potřeba určit geometrické charakteristiky popisující oko šroubu.

Poloměr zakřivení střednice R vypočítáme jako:

$$R = \frac{d_2 + d_3}{4} = \frac{R_2 + R_3}{2} = 14,5 \text{ mm} \quad (41)$$

Obsah obdélníkového příčného průřezu:

$$S = bh = 242 \text{ mm}^2 \quad (42)$$

Osový kvadratický moment:

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = 2440,17 \text{ mm}^4 \quad (43)$$

Pro výpočet poloměru neutrální osy r využijeme odvozený vztah (12). Nejdříve vyřešíme integrál ve jmenovateli zlomku. Jelikož uvažujeme obdélníkový příčný průřez, platí $S = bh$, $dS = b d\rho$.

$$\int_{\psi} \frac{dS}{\rho} = \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \frac{b d\rho}{\rho} = b \int_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = b [\ln \rho]_{R-\frac{h}{2}}^{R+\frac{h}{2}} = b \ln \left(\frac{R + \frac{h}{2}}{R - \frac{h}{2}} \right) = b \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right)$$

Nyní zpětně dosadíme do vztahu (12) a vypočítáme poloměr neutrální osy r :

$$r = \frac{S}{\int_{\psi} \frac{dS}{\rho}} = \frac{bh}{b \ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right)} = \frac{R_3 - R_2}{\ln \left(\frac{R_3}{R_2} \right)} = 13,78 \text{ mm} \quad (44)$$

Excentricitu e neboli vzdálenost neutrální osy od střednice dopočítáme pomocí vztahu:

$$e = R - r = 0,72 \text{ mm} \quad (45)$$

Koeficient smyku β pro obdélníkový průřez byl odvozen v kap. 3.3.1.

Je také potřeba si určit charakteristiky materiálové. Materiál byl vybrán nerezová ocel AISI 304, která má následující vlastnosti:

Youngův modul pružnosti v tahu:

$$E = 200 \text{ GPa} \quad (46)$$

Poissonova konstanta:

$$\mu = 0,29 \quad (47)$$

Modul pružnosti ve smyku:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = 77,52 \text{ GPa} \quad (48)$$

Pro přehlednost si geometrické i materiálové charakteristiky shrneme do tabulky.

R	r	e	S	J _y	β	E	G	μ
[mm]	[mm]	[mm]	[mm ²]	[mm ⁴]	[1]	[GPa]	[GPa]	[1]
14,50	13,78	0,72	242	2440,17	1,2	200	77,52	0,29

Tab. 3: Souhrn geometrických a materiálových charakteristik oka šroubu

Nyní již máme všechny konstanty, které potřebujeme pro vyhodnocení napjatosti a deformace v oku šroubu.

V kapitole 3.1.1 byl odvozen obecný vztah pro ohybové napětí σ_o (17). Tento vztah využijeme pro určení průběhu napětí po příčném průřezu. Číselně však spočteme pouze extrémní napětí $\sigma_{ex,1}$ a $\sigma_{ex,2}$ dle vztahu (19), který upravíme pro námi dané proměnné. Smyková napětí od posouvající síly zanedbáváme.

Extrémní ohybová napětí v příčném průřezu D:

$$\sigma_{oD,ex1} = \frac{M_{oD}}{Se} \frac{h_1}{R_2} = \frac{\frac{FR}{2} \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} \right)}{Se} \frac{r - R_2}{R_2} = 132,75 \text{ MPa} \quad (49)$$

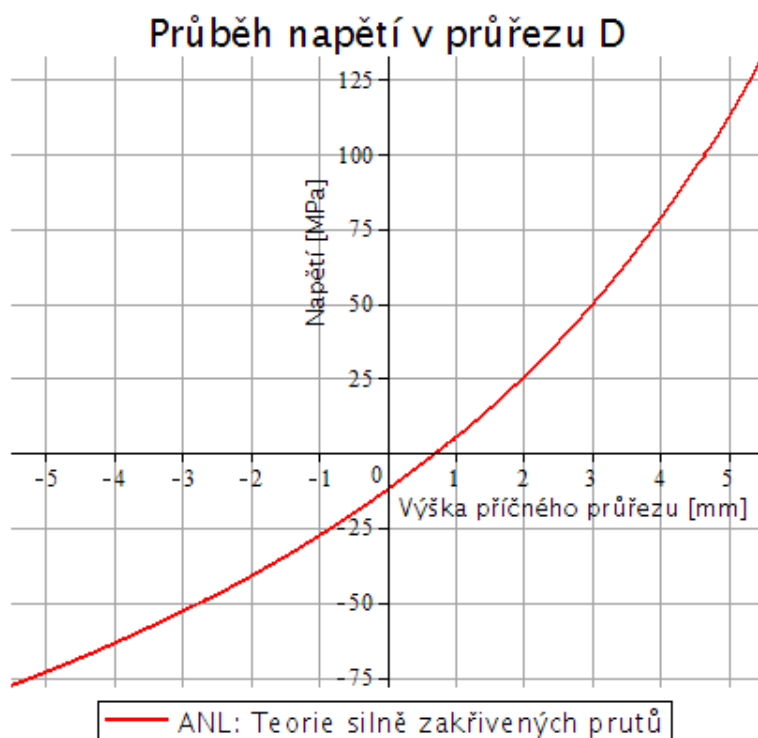
$$\sigma_{oD,ex2} = \frac{M_{oD}}{Se} \frac{h_2}{R_3} = \frac{\frac{FR}{2} \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} \right)}{Se} \frac{r - R_3}{R_3} = -77,86 \text{ MPa}$$

Extrémní přetvoření v příčném průřezu D způsobené ohybovým momentem dopočítáme za předpokladu platnosti Hookova zákona jako:

$$\varepsilon_{oD,ex1} = \frac{\sigma_{oD,ex1}}{E} = 66,37 \cdot 10^{-5} \quad (50)$$

$$\varepsilon_{oD,ex2} = \frac{\sigma_{oD,ex2}}{E} = -38,93 \cdot 10^{-5}$$

Průběh napětí v příčném průřezu D můžeme vidět na Obr. 27. Z grafu lze vyčíst, že průběh napětí je hyperbolický. Taktéž můžeme vidět, že nulová hodnota napětí neprochází středem příčného průřezu, ale je posunuta právě do neutrální osy.



Obr. 27: Průběh napětí v průřezu D oka šroubu (silně zakřivený prut)

Extrémní ohybové napětí v příčném průřezu B:

$$\sigma_{oB,ex1} = \frac{M_{oD}}{Se} \frac{h_1}{R_2} = \frac{FR \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} \right)}{2Se} \frac{r - R_2}{R_2} = 86,73 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{oB,ex2} = \frac{M_{oD}}{Se} \frac{h_2}{R_3} = \frac{FR \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} \right)}{2Se} \frac{r - R_3}{R_3} = -50,87 \text{ MPa}$$

V průřezu B nám spolu s ohybovým napětím působí i napětí tahové:

$$\sigma_{NB} = \frac{N_B}{S} = \frac{F}{2S} = 20,66 \text{ MPa}$$

Po sečtení extrémních ohybových napětí s napětím normálovým získáme výsledné extrémní napětí vzniklé v průřezu B:

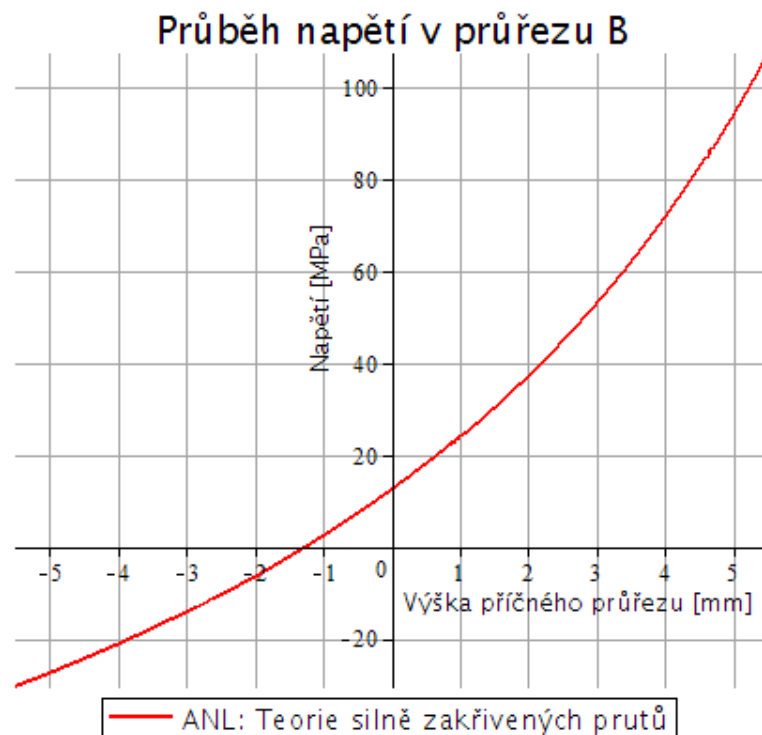
$$\sigma_{B,ex1} = \sigma_{oB,ex1} + \sigma_{NB} = 107,39 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{B,ex2} = \sigma_{oB,ex2} + \sigma_{NB} = -30,21 \text{ MPa}$$

Extrémní přetvoření vzniklé v extrémech napětí:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{B,ex1} &= \frac{\sigma_{oB,ex1}}{E} = 53,7 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{B,ex2} &= \frac{\sigma_{oB,ex2}}{E} = -15,1 \cdot 10^{-5}\end{aligned}\tag{54}$$

Průběh napětí v průřezu B:



Obr. 28: Průběh napětí v průřezu B oka šroubu (silně zakřivený prut)

Z vypočtených hodnot vyplývá, že nebezpečným průřezem bude příčný průřez D a v něm lze za nebezpečné místo označit vnitřní stranu oka (poloměr R_2) z důvodu, že se v něm vyskytuje maximální napětí z celého oka šroubu.

Přetvoření bude mít stejný průběh jako napětí, jelikož se držíme v mezích platnosti Hookova zákona. Dále jej již však rozebírat nebudeme.

Z hlediska deformace oka šroubu je důležité, abychom nepřekročili případný mezní stav deformace. Jelikož se šroub s okem používá při montážích a v různých částech strojů a zařízení, může se stát, že v těsné blízkosti bude jiná součást a nechceme, aby se jí oko šroubu dotklo. Je proto potřebné vypočítat deformaci oka, resp. průhyb oka ve směru působení síly.

Pro řešení posunutí bodů C a D využijeme vztah (22):

$$\begin{aligned}\delta_{CD} &= 2 \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} = 2 \int_{\gamma} \frac{M_o}{ESeR} \frac{\partial M_o}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dS - 2 \int_{\gamma} \left[\frac{M_o}{ESR} \frac{\partial N}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} + \frac{N}{ESR} \frac{\partial M_o}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} \right] dS \\ &\quad + 2 \int_{\gamma} \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dS + 2 \int_{\gamma} \frac{\beta T}{GS} \frac{\partial T}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dS \\ \delta_{CD} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{FR}{2} \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} + \cos(\varphi) \right)}{ESeR} R \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} + \cos(\varphi) \right) R d\varphi \\ &\quad - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{FR}{2} \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} + \cos(\varphi) \right)}{ESR} \cos(\varphi) + \frac{\frac{F}{2} \cos(\varphi)}{ESR} R \left(\frac{2e}{\pi R} - \frac{2}{\pi} + \cos(\varphi) \right) \right] R d\varphi \\ &\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{F}{2} \cos(\varphi)}{ES} \cos(\varphi) R d\varphi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta \frac{F}{2} \sin(\varphi)}{GS} \sin(\varphi) R d\varphi\end{aligned}$$

Po úpravě a integraci v softwaru Maple 17 dostaneme vztah:

$$\delta_{CD} = \frac{1}{4} \frac{F(\pi^2 R^2 - 8R^2 + 8e^2)}{\pi ESe} - \frac{1}{2} \frac{F(\pi^2 R - 8R + 8e)}{\pi ES} + \frac{1}{4} \frac{F\pi R}{ES} + \frac{1}{4} \frac{\pi \beta FR}{GS}$$

Po dosazení hodnot z Tab. 3 dostaneme hodnotu posuvu bodu C oproti bodu D:

$$\delta_{CD} = 0.0176 \text{ mm} \quad (55)$$

Při porovnání vlivu příspěvků jednotlivých složek energie napjatosti, které jsme použili pro výpočet posuvu mezi bodem C a D je zřejmé, že ohybový moment má největší procentuální zastoupení. Neliší se však velmi od složky posouvající síly. Je zde patrné, že kdybychom si výpočet zjednodušili a počítali jen se složkou ohybového momentu, dopustíme se velké chyby.

	Vliv příspěvků složek			
	M _o	M _o N	N	T
	[%]	[%]	[%]	[%]
	44,58	0,58	13,39	41,45
Posunutí [mm]	0,0078	0,0001	0,0024	0,0073

Tab. 4: Porovnání příspěvků složek posunutí oka šroubu (silně zakřivený prut)

6.1.2 Řešení pomocí teorie slabě zakřivených prutů

Jelikož teorie slabě zakřivených prutů má odlišný vztah pro energii napjatosti (31), musíme si opět vypočítat ohybový moment M_{oB} . Budeme znovu uvažovat nulové natočení v bodě B ($\varphi_B = 0$).

$$\begin{aligned}\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_{oB}} &= \int_{\gamma} \frac{M_o}{E J_y} \frac{\partial M_o}{\partial M_{oB}} dS + \int_{\gamma} \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial M_{oB}} dS + \int_{\gamma} \frac{\beta T}{GS} \frac{\partial T}{\partial M_{oB}} dS \\ 0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{oB} - \frac{F}{2} R (1 - \cos(\varphi))}{E J_y} 1 R d\varphi\end{aligned}$$

Vyžitím softwaru Maple 17 dostaneme vztah pro výpočet ohybového momentu M_{oB} :

$$M_{oB} = \frac{FR}{2} \frac{(\pi - 2)}{\pi} \quad (56)$$

Po zpětném dosazení do vztahu (37):

$$M_o = \frac{FR}{2} \left(-\frac{2}{\pi} + \cos(\varphi) \right) \quad (57)$$

Pro $\varphi = \frac{\pi}{2}$ je hodnota ohybového momentu v bodě D:

$$M_{oD} = -\frac{FR}{\pi} \quad (58)$$

Extrémní ohybová napětí v příčném průřezu D:

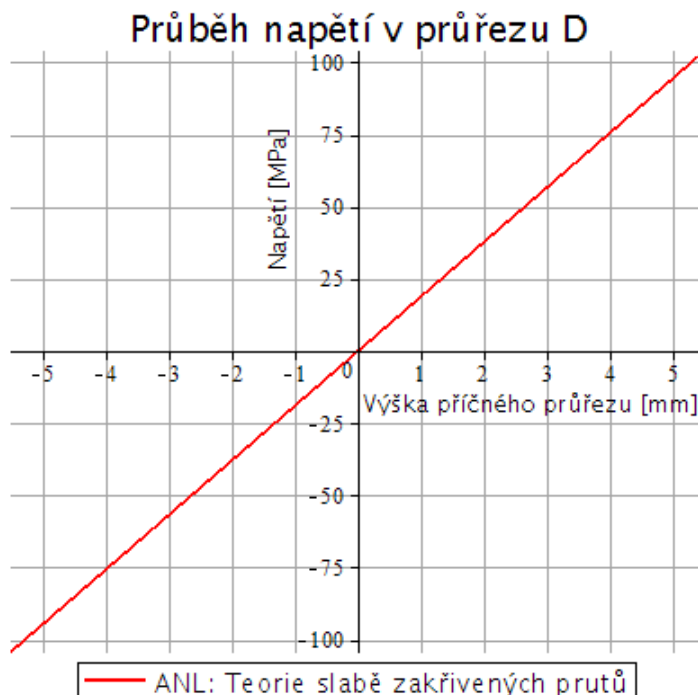
$$\sigma_{oD,ex1} = \frac{M_{oD}}{J_y} \cdot \left(-\frac{h}{2} \right) = -\frac{\frac{FR}{\pi}}{J_y} \cdot \left(-\frac{R_3 - R_2}{2} \right) = 104,03 \text{ MPa} \quad (59)$$

$$\sigma_{oD,ex2} = \frac{M_{oD}}{J_y} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{\frac{FR}{\pi}}{J_y} \cdot \frac{R_3 - R_2}{2} = -104,03 \text{ MPa}$$

Extrémní přetvoření:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{oD,ex1} &= \frac{\sigma_{oD,ex1}}{E} = 52,015 \cdot 10^{-5} \\ \varepsilon_{oD,ex2} &= \frac{\sigma_{oD,ex2}}{E} = -52,015 \cdot 10^{-5}\end{aligned} \quad (60)$$

Průběh napětí v příčném průřezu D lze vidět na Obr. 29. Průběh napětí je lineární s nulovou hodnotou ve střednici.



Obr. 29: Průběh napětí v příčném průřezu D (slabě zakřivený prut)

Extrémní ohybová napětí v příčném průřezu B:

$$\sigma_{oB,ex1} = \frac{M_{oB}}{J_y} \cdot \left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{\frac{FR}{2} \frac{(\pi-2)}{\pi}}{J_y} \cdot \left(-\frac{R_3 - R_2}{2}\right) = 59,38 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{oB,ex2} = \frac{M_{oB}}{J_y} \cdot \frac{h}{2} = -\frac{\frac{FR}{2} \frac{(\pi-2)}{\pi}}{J_y} \cdot \frac{R_3 - R_2}{2} = -59,38 \text{ MPa}$$
(61)

V průřezu B nám spolu s ohybovým napětím působí i napětí tahové (52):

Po sečtení extrémních ohybových napětí s napětím normálovým získáme výsledné extrémní napětí vzniklé v průřezu B:

$$\sigma_{B,ex1} = \sigma_{oB,ex1} + \sigma_{NB} = 80,04 \text{ MPa}$$

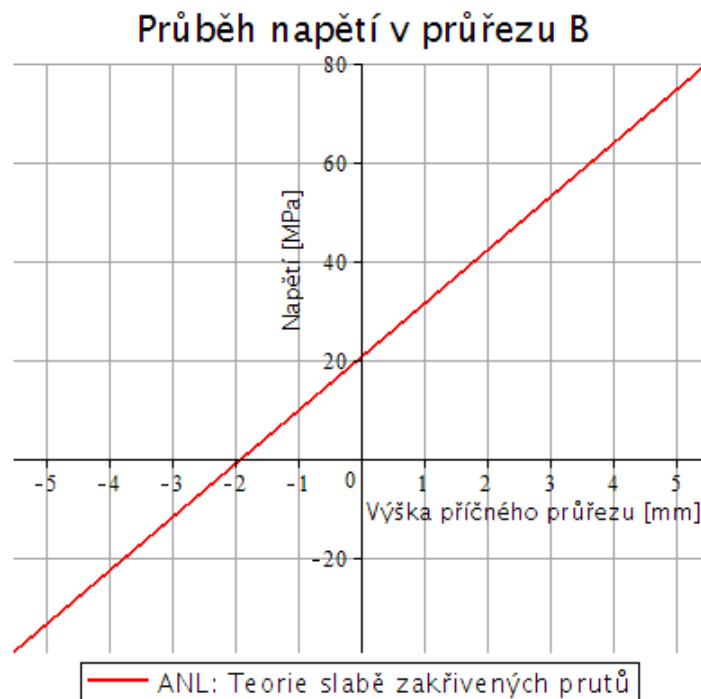
$$\sigma_{B,ex2} = \sigma_{oB,ex2} + \sigma_{NB} = -38,72 \text{ MPa}$$
(62)

Extrémní přetvoření:

$$\varepsilon_{oB,ex1} = \frac{\sigma_{oB,ex1}}{E} = 40,02 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_{oB,ex2} = \frac{\sigma_{oB,ex2}}{E} = -19,36 \cdot 10^{-5}$$
(63)

Průběh napětí v příčném průřezu B:



Obr. 30: Průběh napětí v příčném průřezu B (slabě zakřivený prut)

Pro výpočet posuvu mezi bodem C a D využijeme energii napjatosti slabě zakřiveného prutu (31).

$$\begin{aligned}\delta_{CD} &= 2 \frac{\partial W}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} = 2 \left(\int_V \frac{M_o}{EJ_y} \frac{\partial M_o}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dS + \int_V \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dS + \int_V \frac{\beta T}{GS} \frac{\partial T}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} dS \right) \\ \delta_{CD} &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{FR}{2} \left(-\frac{2}{\pi} + \cos(\varphi)\right)}{EJ_y} \cdot R \left(\frac{2}{\pi} - \cos(\varphi)\right) R d\varphi \\ &\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{F}{2} \cos(\varphi)}{ES} \cos(\varphi) R d\varphi + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta \frac{F}{2} \sin(\varphi)}{GS} \sin(\varphi) R d\varphi\end{aligned}$$

Po úpravě a integraci v softwaru Maple 17 dostaneme vztah:

$$\delta_{CD} = \frac{1}{4} \frac{FR^3(\pi^2 - 8)}{\pi EJ_y} + \frac{1}{4} \frac{FR\pi}{ES} + \frac{1}{4} \frac{\pi\beta FR}{GS}$$

Po dosazení hodnot z Tab. 3 dostaneme hodnotu posuvu bodu C oproti bodu D:

$$\delta_{CD} = 0.019 \text{ mm} \quad (64)$$

Porovnání vlivu jednotlivých složek energie napjatosti použitých pro výpočet je v Tab. 5:

Vliv příspěvků složek			
	M_o	N	T
	[%]	[%]	[%]
	49,09	12,43	38,48
Posunutí [mm]	0,0093	0,0024	0,0073

Tab. 5: Porovnání příspěvků složek posunutí oka šroubu (slabě zakřivený prut)

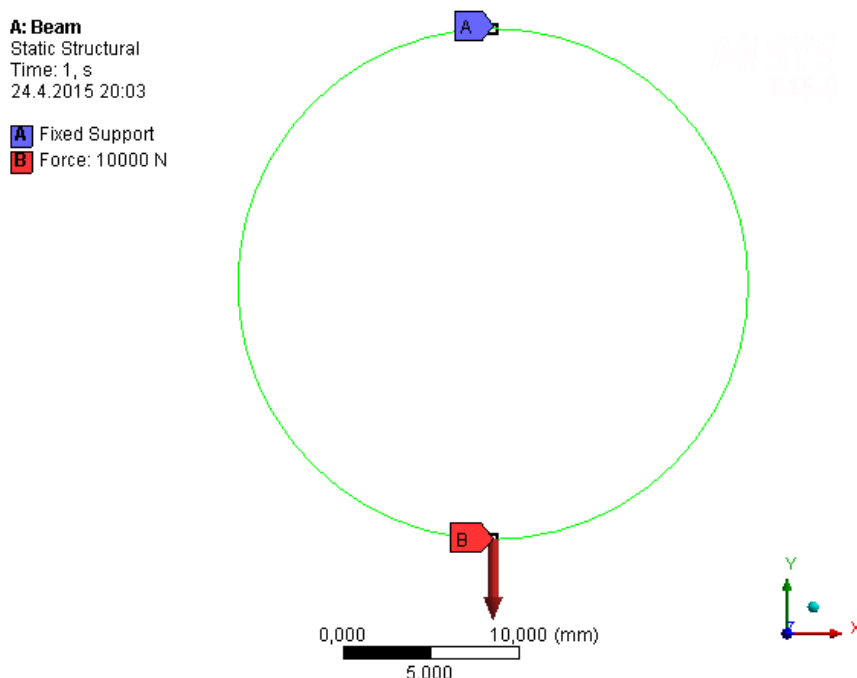
6.2 Numerický přístup

Při vyhodnocování oka šroubu bylo vytvořeno několik výpočtových modelů. A to modelů s využitím prvků BEAM 189, PLANE 183 a SOLID 186. Zatížení bylo voleno jak silové, tak s kontaktem. U kontaktních úloh bylo využito i prvků CONTA 174 a TARGE 170. Analýzy byly prováděny v softwaru ANSYS Workbench 15.

6.2.1 Řešení pomocí prvku BEAM 189

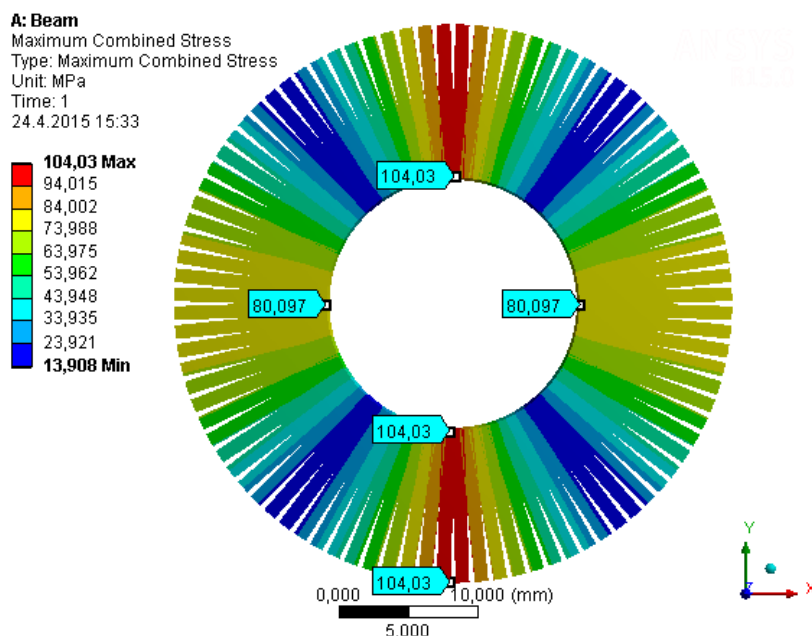
Jak již bylo řečeno v kap. 5.1, prvek BEAM sám o sobě je vhodnější pro prutové konstrukce, ne tělesa. Jelikož ANSYS Workbench ve verzi 15 ještě neumí u prvku BEAM vykreslit zároveň maximální a minimální kombinované napětí v prutu, bude proto kombinované napětí rozděleno do dvou obrázků. Ve výpočtovém modelu pro tento případ nebyla využita symetrie, jelikož výpočet nebyl zdlouhavý.

Výpočtový model je na Obr. 31. Lze vidět vymodelovanou kruhovou střednici. Vazba vetknutí je označena jako A, působící síla jako B.



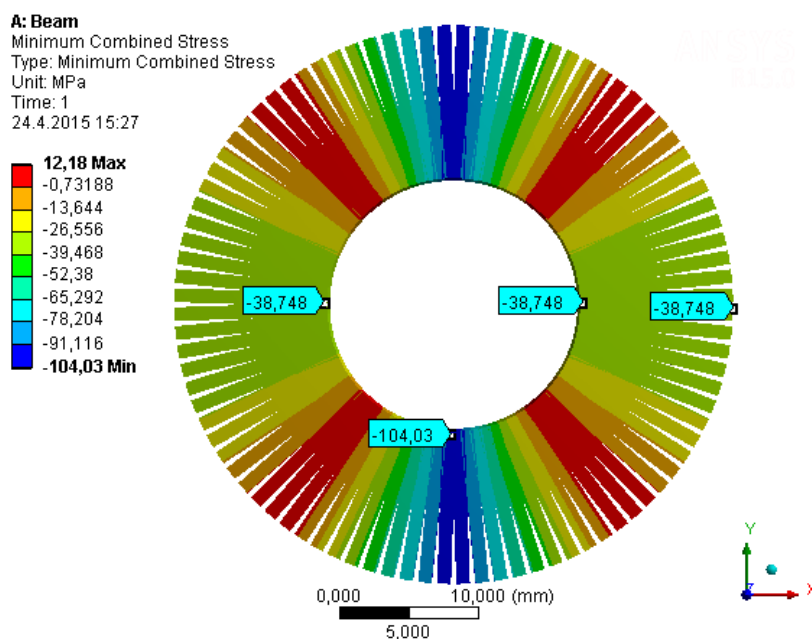
Obr. 31: Okrajové podmínky oka šroubu (Prvek BEAM)

Na Obr. 32 můžeme vidět maximální kombinované napětí. Lze vidět, že v průřezu D je maximální kombinované napětí $\sigma_{D1} = 104,03$ MPa, v průřezu B $\sigma_{B1} = 80,10$ MPa. Tyto hodnoty napětí odpovídají hodnotám na vnitřní straně průřezu oka, tedy průměru d_2 .



Obr. 32: Maximální kombinované napětí oka šroubu (Prvek BEAM)

Minimální kombinované napětí je zobrazeno na Obr. 33. V příčném průřezu D je hodnota napětí $\sigma_{D2} = -104,03$ MPa, v průřezu B $\sigma_{B2} = -38,75$ MPa. Tyto hodnoty napětí odpovídají hodnotám na vnější straně průřezu, tedy průměru d_3 .



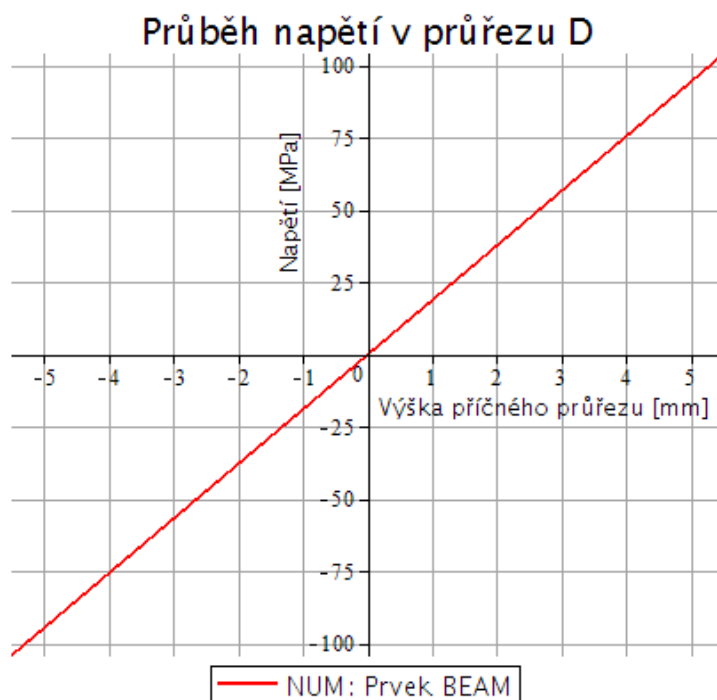
Obr. 33: Minimální kombinované napětí oka šroubu (Prvek BEAM)

Pro přehlednost jsou hodnoty extrémních napětí vloženy do Tab. 6.

σ_{D1}	σ_{D2}	σ_{B1}	σ_{B2}
[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
104,03	-104,03	80,10	-38,75

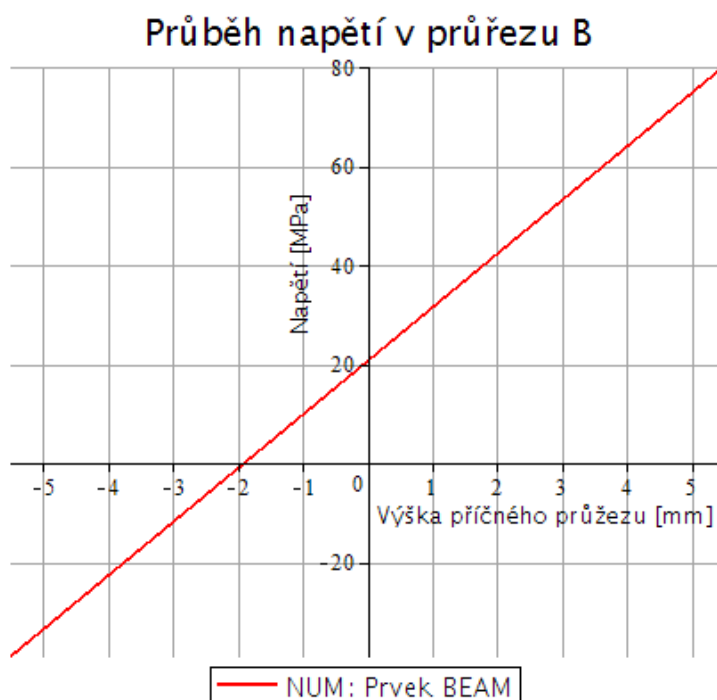
Tab. 6: Extrémní napětí v oku šroubu (Prvek BEAM)

Průběh napětí v příčném průřezu D:



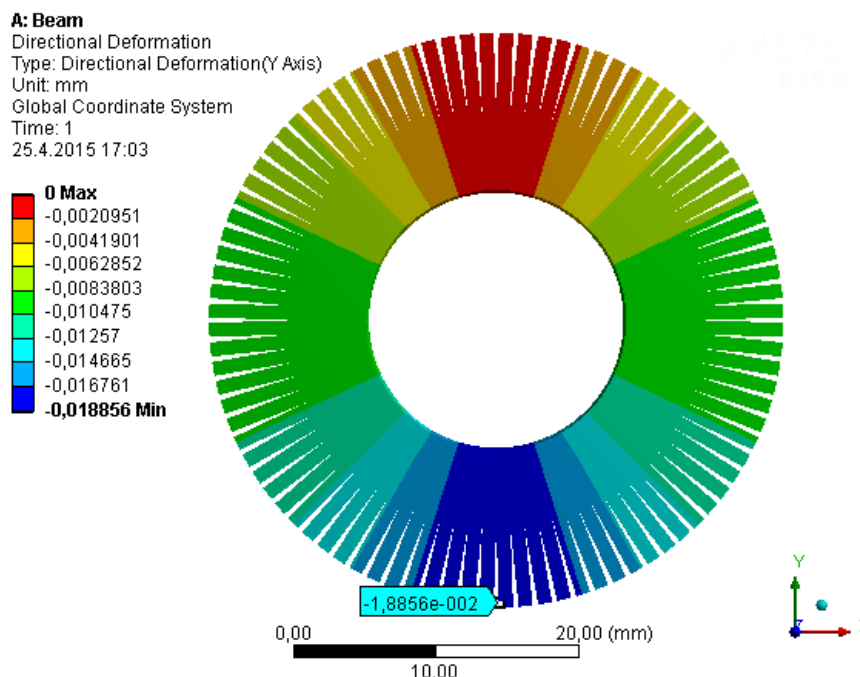
Obr. 34: Průběh napětí v příčném průřezu D oka šroubu (Prvek BEAM)

Průběh napětí v příčném průřezu B:



Obr. 35: Průběh napětí v příčném průřezu B oka šroubu (Prvek BEAM)

Deformace oka šroubu byla vyhodnocena ve směru působení síly (ve směru osy y) viz Obr. 36.



Obr. 36: Deformace ve směru působení síly (osy y) oka šroubu (Prvek BEAM)

Maximální hodnota posunutí:

$$\delta_{CD} = 0.0189 \text{ mm}$$

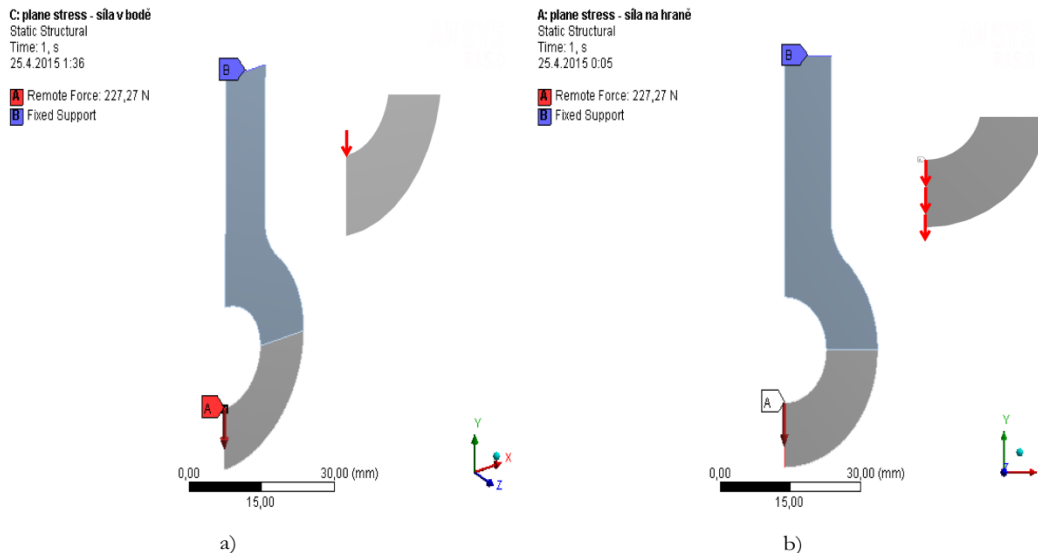
6.2.2 Řešení pomocí prvku PLANE 183

Prvek PLANE oproti prvku BEAM, je již vhodnější pro analýzu těles. Výpočtový model tělesa byl vytvořen v podmínkách rovinné napjatosti (plane stress) a byla využita jedna osa symetrie. Dále byly vytvořeny dva modely zatížení.

- První model zatížení je realizován pouze jedinou silou, která lokálně působí na vnitřním povrchu v bodě C. Její velikost je kvůli použité symetrii polovina původní síly, tedy $F/2$. Jelikož těleso bylo modelováno se šířkou průřezu 1mm, bylo potřebné sílu $F/2$ ještě podělit skutečnou šířkou průřezu b . Díky tomuto zatížení dojde k degradaci sítě, což vyvolá lokální koncentraci napětí (viz kap 5.2). V grafech je tato varianta označena jako „NUM: Rovinná úloha var. 1 (síla v uzlu)“.
- Druhý model zatížení je realizován tak, že síla je rozprostřena do všech uzlů na nositelce síly. Platí $\sum_i^n F_i = F$. Opět platí, že těleso bylo modelováno se šířkou průřezu 1mm, proto je nutné sílu $F/2$ podělit šířkou průřezu b . Je nutno zdůraznit, že se nejedná o totéž zatížení jako za a). Jak již bylo řečeno v kap. 5.2. Každá osamělá síla, i když rozprostřená, způsobuje lokální koncentraci. V tomto případě jsme se tedy zbavili lokální koncentrace v bodě blízko vnitřnímu povrchu, ale do každého bodu (uzlu) jsme tento koncentrátor vnesli znovu, i když v menší míře. V grafech je tato varianta označena jako „NUM: Rovinná úloha var. 2 (síla na hraně)“.

V obou těchto případech se však nejedná o realitu. Pro realizaci zatížení totiž používáme sílu, což je pouze abstraktní zatížení, které v praxi neexistuje.

Na Obr. 37 jsou zobrazeny okrajové podmínky pro oba způsoby zatížení. Působící síla je označena jako A, vazba vetknutí jako B. Taktéž byla využita symetrie ve směru normály x.

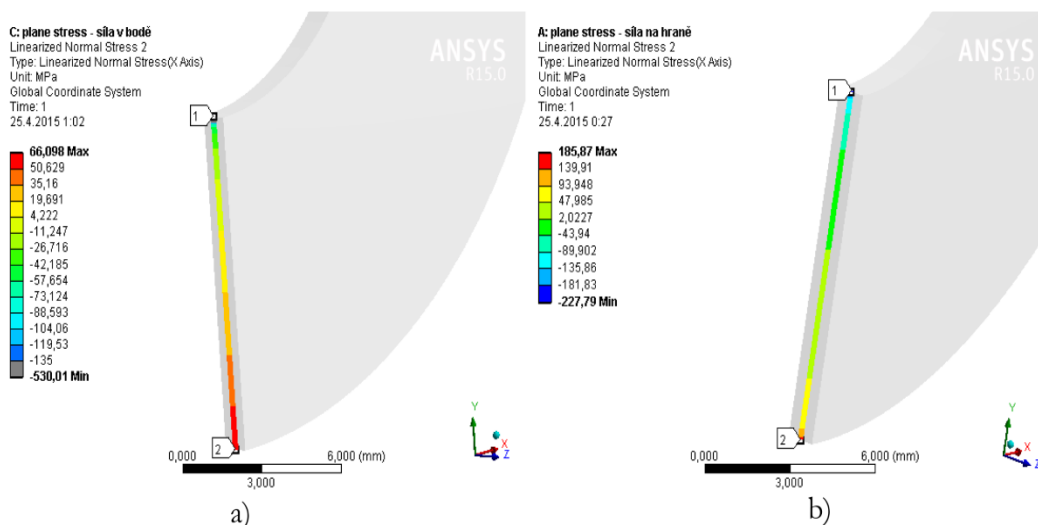


Obr. 37: Okrajové podmínky oka šroubu (Prvek PLANE)

Linearizovaný průběh normálového napětí ve směru osy x po příčném průřezu D lze vidět na Obr. 38. Rozdíl mezi průběhy je patrný.

U prvního modelu zatížení a), tedy silou do bodu (uzlu), se napětí lokálně koncentruje pouze na vnitřním povrchu. Extrémní hodnota napětí na vnitřním povrchu (průměr d_2) $\sigma_{D1} = 530,01$ MPa a na vnějším povrchu (průměr d_3) $\sigma_{D2} = -66,10$ MPa.

U druhého modelu zatížení b), tedy v případě, kdy je síla rozprostřena do všech uzlů na její nositelce, jsou extrémní hodnoty napětí na vnitřním povrchu $\sigma_{D1} = 227,79$ MPa a na vnějším povrchu $\sigma_{D2} = -185,87$ MPa.

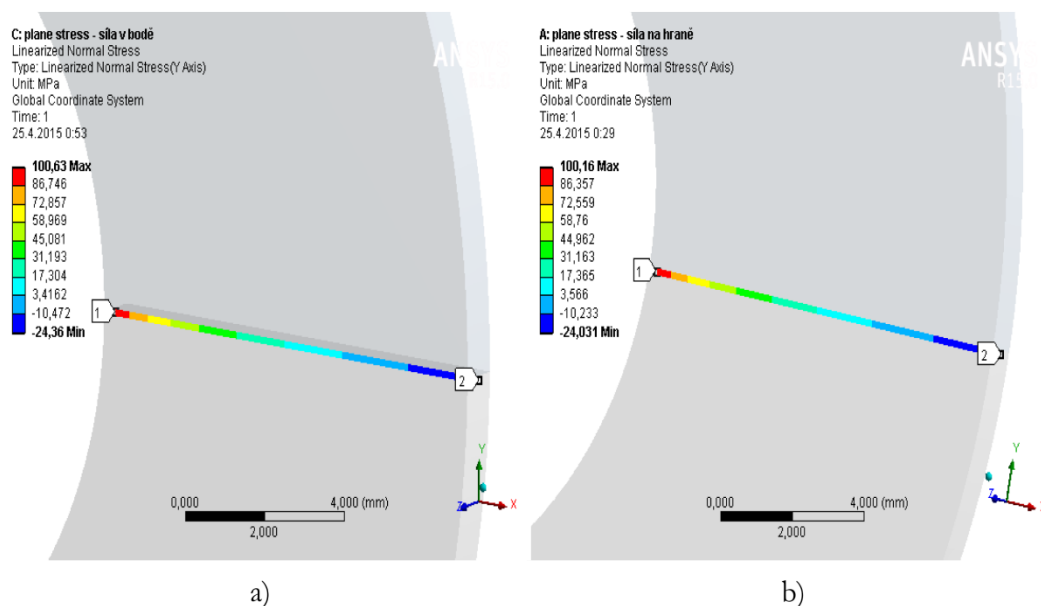


Obr. 38: Linearizovaný průběh normálového napětí v ose x po příčném průřezu D oka šroubu (Prvek PLANE)

Linearizovaný průběh normálového napětí ve směru osy y po příčném průřezu B je na Obr. 39. Lze postřehnout, že pokud se pohybujeme v místě dostatečně vzdáleném od místa působení síly, tedy i místa vzniku koncentrátoru, výsledky již nejsou ovlivněny. Z obrázku je patrné, že průběhy napětí jsou téměř shodné.

U modelu zatížení a) jsou hodnoty extrémních napětí na vnitřním povrchu $\sigma_{B1} = 100,63$ MPa a na vnějším povrchu $\sigma_{B2} = -24,36$ MPa.

U modelu zatížení b) jsou hodnoty extrémních napětí na vnitřním povrchu $\sigma_{B1} = 100,16$ MPa a na vnějším povrchu $\sigma_{B2} = -24,03$ MPa.



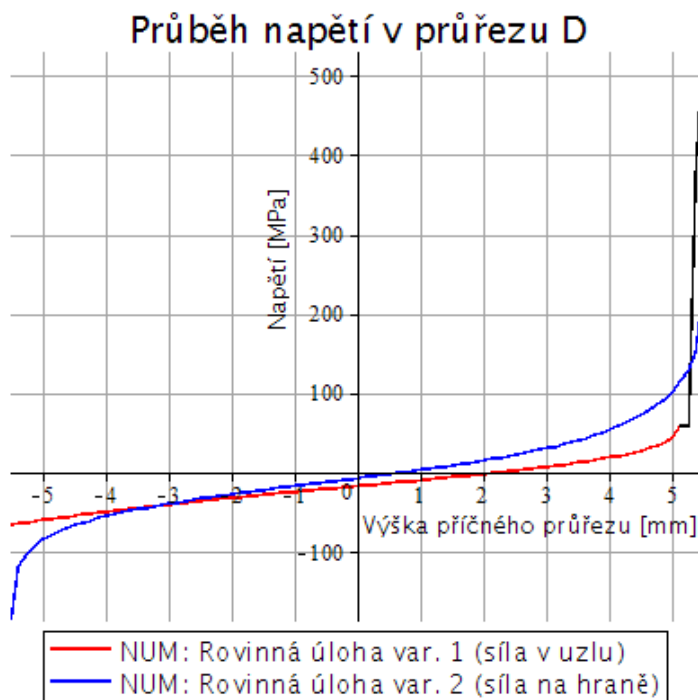
Obr. 39: Linearizovaný průběh normálového napětí v ose y po příčném průřezu B oka šroubu (Prvek PLANE)

Pro přehlednost byly hodnoty extrémních napětí vloženy do Tab. 7.

	σ_{D1}	σ_{D2}	σ_{B1}	σ_{B2}
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
„Síla v uzlu“	530,01	-66,10	100,63	-24,36
„Síla na hraně“	227,79	-185,87	100,16	-24,03

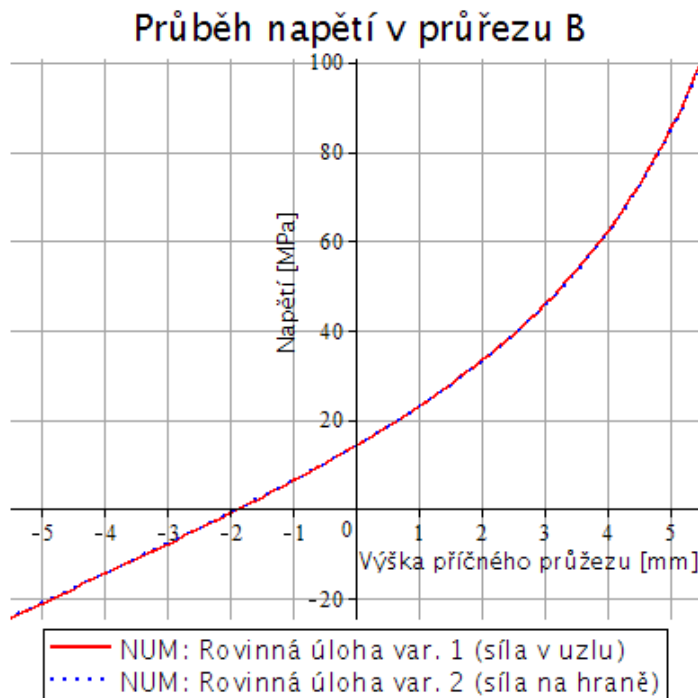
Tab. 7: Extrémní napětí v oku šroubu (Prvek PLANE)

Průběh napětí v příčném průřezu D je zobrazen na Obr. 40. Lze v něm vidět obě varianty zatížení. Křivka s červenou barvou je zde varianta a). Část její křivky tvoří i křivka s černou barvou. Tato křivka znázorňuje hodnoty ovlivněné lokálním koncentrátorem. Při vyhodnocování této křivky musí být brána tato skutečnost do úvahy. Křivka s modrou barvou značí zatížení b).



Obr. 40: Průběh napětí v příčném průřezu D oka šroubu (Prvek PLANE)

Průběh napětí v příčném průřezu B je zobrazen na Obr. 41. Průběhy napětí od obou způsobů zatížení jsou zde prakticky totožné.



Obr. 41: Průběh napětí v příčném průřezu B oka šroubu (Prvek PLANE)

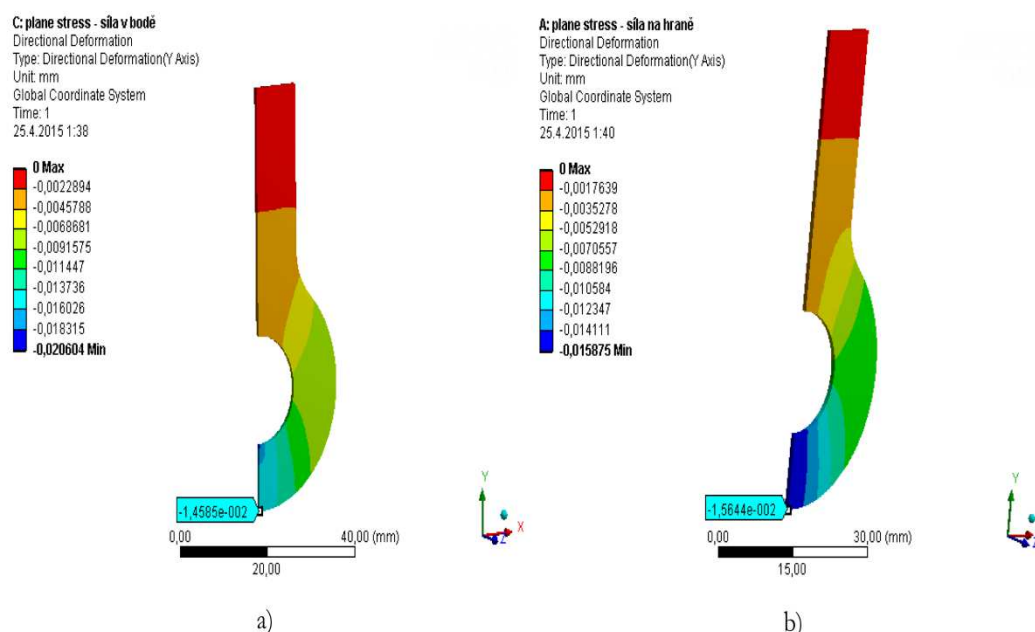
Z hlediska deformace byla vyhodnocena opět deformace ve směru osy y, tedy ve směru působení síly, viz Obr. 42.

Pro variantu zatížení a) je maximální posunutí na vnitřním povrchu v místě působení síly. Tato skutečnost je opět ovlivněna lokálním koncentrátorem. S ohledem na mezní stav deformace je však více zajímavý bod na vnějším povrchu oka, proto budeme uvažovat tuto hodnotou posunutí.

$$\delta_{CD} = 0.0146 \text{ mm}$$

Ve variantě zatížení b) budeme uvažovat stejně jako ve variantě a) s ohledem na mezní stav deformace. Hodnota posunutí vnějšího povrchu oka v místě nositelky působící síly je:

$$\delta_{CD} = 0.0156 \text{ mm}$$



Obr. 42: Deformace ve směru působení síly (osy y) oka šroubu (Prvek PLANE)

6.2.3 Řešení pomocí prvku SOLID 186

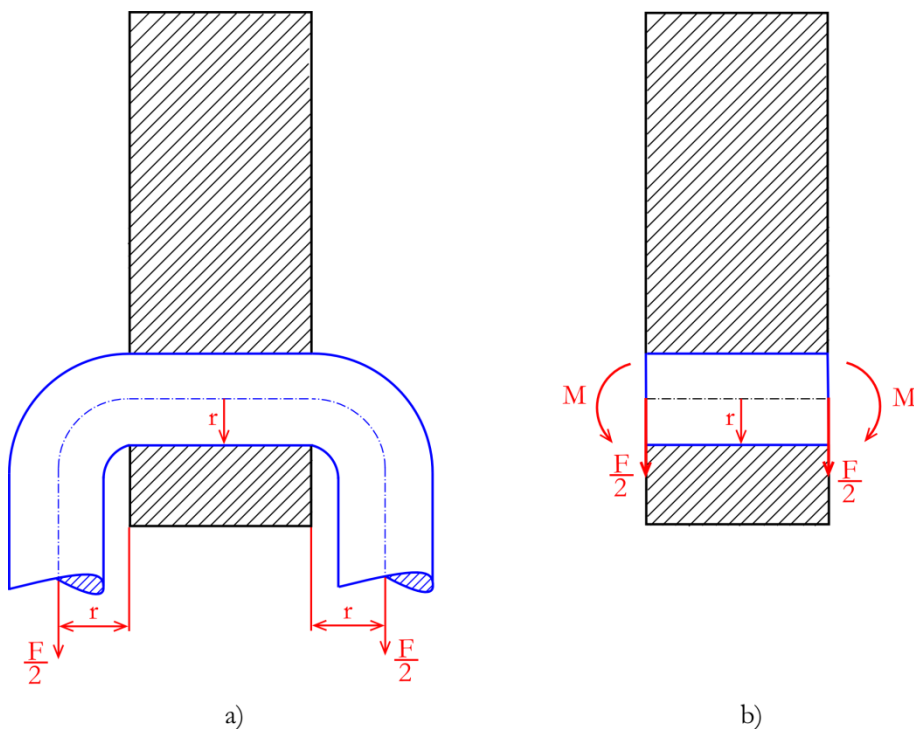
Jako nejpřesnější řešení by mělo být použití kontaktu mezi okem závěsného tělesa a lanem (drátem, popř. jiným vázacím prostředkem). Při řešení kontaktních úloh byl použit prvek SOLID 186. Taktéž byly vytvořeny dva modely zatížení.

- V první variantě je zvolena následující realizace: $R_2 \gg R_0$, neboli vnitřní poloměr oka šroubu je několikanásobně větší než poloměr tělesa, které je okem protáhnuto. V grafech je tato varianta označena jako „NUM: kontaktní úloha var. 1 (malé těleso)“.
- Ve druhé variantě je zvolena realizace $R_2 \sim R_0$, neboli vnitřní poloměr oka šroubu je přibližně stejně velký jako poloměr tělesa, které je okem protáhnuto. V grafech je tato varianta označena jako „NUM: kontaktní úloha var. 2 (velké těleso)“.

Byl uvažován případ dle Obr. 43a). Těleso ve tvaru lana je protaženo okem šroubu a zatíženo. Pro zjednodušení modelování a zkrácení výpočtového času byl model zjednodušen dle Obr. 43b). Model lana byl taktéž zjednodušen na tvar kruhového průřezu. Moment, který by v soustavě vznikl, byl vypočten jako:

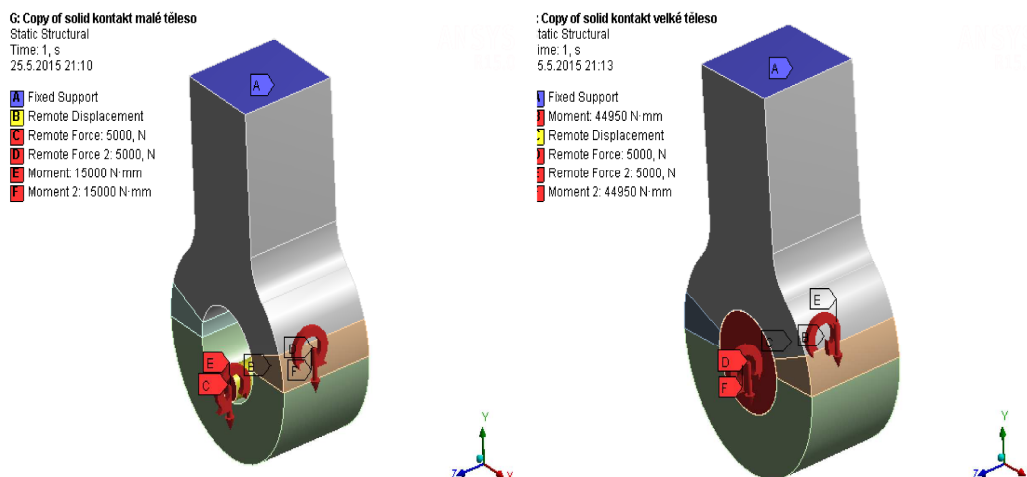
$$M = \frac{F}{2} \cdot r$$

kde r je poloměr lana. Zavedli jsme předpoklad, že poloměr lana je přibližně stejně velký jako vzdálenost okraje oka šroubu od střednice lana.



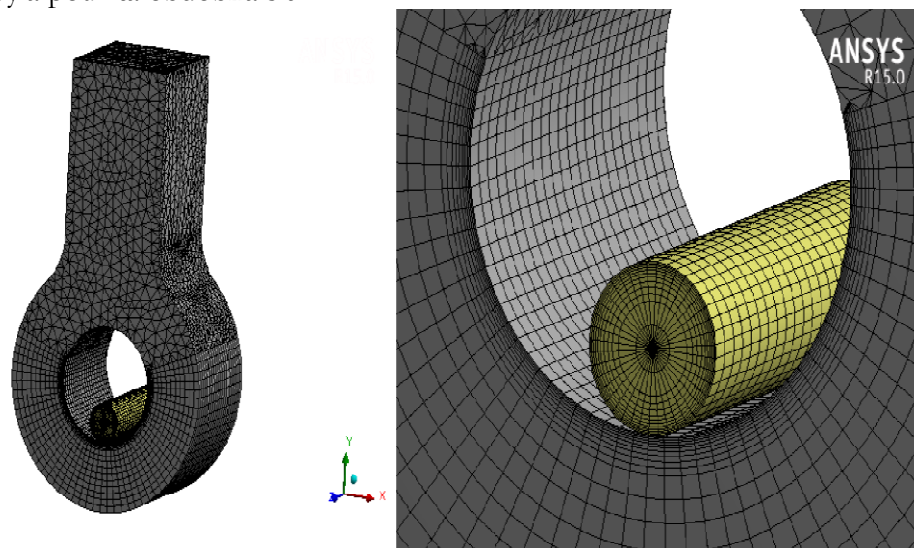
Obr. 43: Lano protažené šroubem s okem (a) a jeho zjednodušený model (b)

Na Obr. 44 jsou zobrazeny okrajové podmínky pro oba způsoby zatížení. Vazba vetknutí je označena modrou barvou, působící síly jsou rozděleny dle Obr. 43b) a jsou umístěny na okraje lana, stejně tak i momenty. Zamezení posuvu ve směru osy X a Z a všech natočení je umístěno na vnějším povrchu lana z toho důvodu, aby se lano pohybovalo pouze ve směru osy Y a nedošlo k nechtěnému chování během výpočtu. Poloměr lana ve variantě zatížení a) byl zvolen $R_0 = 3 \text{ mm}$, pro variantu b) $R_0 = 8,99 \text{ mm}$. Kontaktní vazba byla použita vazba frictionless.



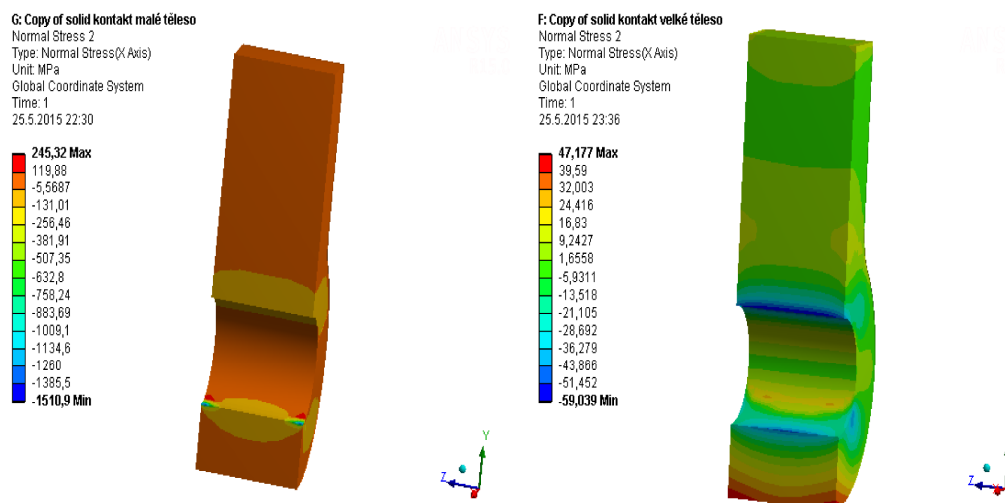
Obr. 44: Okrajové podmínky oka šroubu (Prvek SOLID)

Na Obr. 45 je ukázka sítě, která byla použita u numerických výpočtů. Na obrázku lze konkrétně vidět síť pro variantu a) s použitým prvkem SOLID 186. Oblast oka, kde požadujeme, aby výsledky byly přesné, byla vyrobena z hexagonálních elementů. Zbylá oblast následně pomocí tetrahedronových elementů. Síť je navíc zjemněna v místě dotyku obou těles. Ve všech ostatních analýzách byla použita obdobná síť.



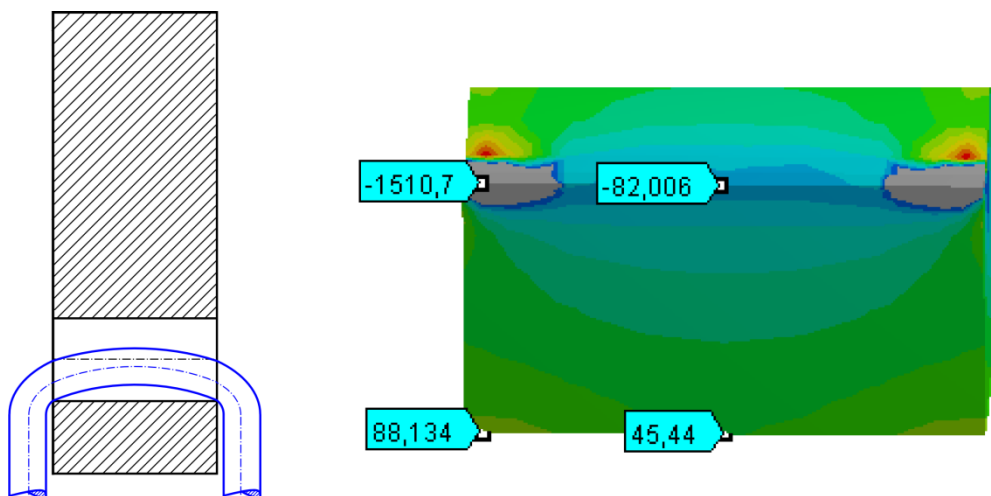
Obr. 45: Ukázka sítě použité u numerických výpočtů

Normálové napětí ve směru osy x po příčném průřezu D můžeme vidět na Obr. 46.



Obr. 46: Normálové napětí ve směru osy x po příčném průřezu D oka šroubu (Prvek SOLID)

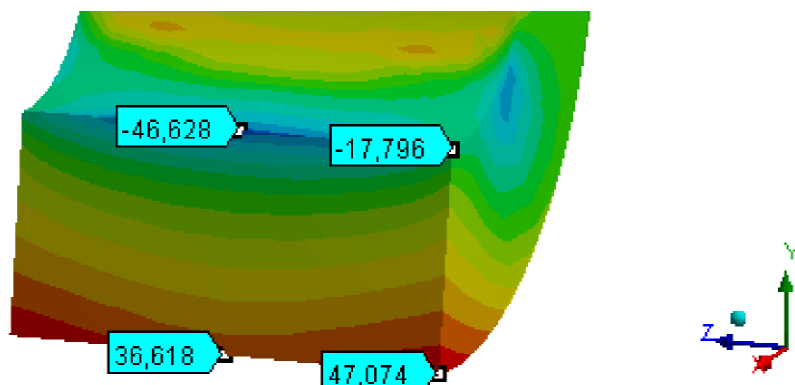
U varianty a), neboli modelu zatížení malým tělesem, lze vidět, že vzniká vysoká koncentrace napětí na okrajích oka šroubu, což je zapříčiněno tím, že se těleso vlivem zatížení prohne dle Obr. 47. Kontaktní oblast je tedy pouze na okrajích oka. Hodnota normálového napětí oka šroubu na střednici na vnitřním povrchu $\sigma_{D1} = 82 \text{ MPa}$ a na vnějším povrchu $\sigma_{D2} = -45,44 \text{ MPa}$.



Obr. 47: Prohnutí malého lana při zatížení; hodnoty normálového napětí v ose x po příčném průřezu D zatížené malým tělesem (Prvek SOLID)

U varianty b), neboli modelu zatížení velkým tělesem, je patrné, že na vnitřním povrchu oka šroubu nedochází k tak velké koncentraci napětí jako u varianty a). Je to z důvodu, že kontaktní oblast je velká a stykový tlak se dokáže rozložit po celém oku. Taktéž i z toho důvodu, že při zatížení se oko šroubu zdeformuje a dojde ke „skousnutí“ tělesa v oku. Kontaktní oblast je tedy po celém vnitřním povrchu s maximální hodnotou na krajích oka. Hodnota normálového napětí oka šroubu ve směru osy x na vnitřním povrchu $\sigma_{D1} = 46,63 \text{ MPa}$ a na vnějším povrchu $\sigma_{D2} = -36,62 \text{ MPa}$. Jak lze také vidět na Obr. 48, hodnoty normálového napětí ve směru osy x nejsou na vnitřním ani vnějším povrchu konstantní. Na vnitřním povrchu je maximální napětí největší uprostřed z toho důvodu, že se oko začne deformovat (roztahovat) ve směru osy z vlivem působení tělesa na oko šroubu. Tím vznikne

dodatečné tahové napětí, které se směrem k okrajům oka bude postupně zmenšovat. Vnější povrch se právě důsledkem roztáhnutí vnitřního povrchu začne stlačovat, čímž se napětí na okrajích zvýší a postupně ke středu bude klesat.

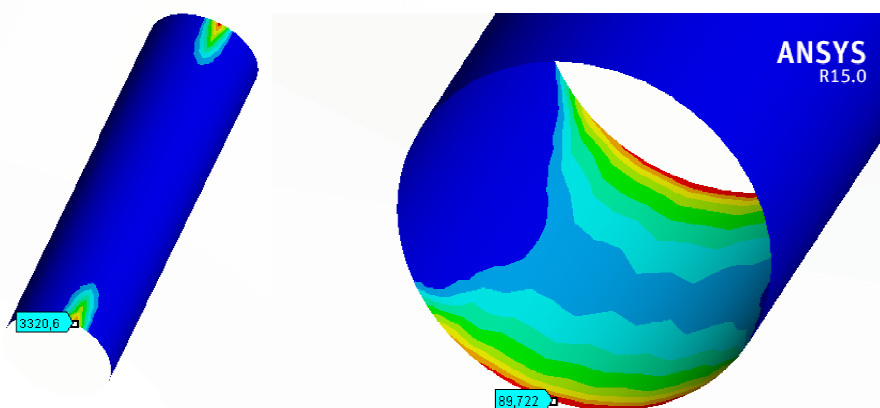


Obr. 48: Hodnoty normálového napětí v ose x po příčném průřezu D velkým tělesem (Prvek SOLID)

Rozložení stykového tlaku je zobrazeno na Obr. 49.

Při modelu zatížení a) je jasné vidět, že stykový tlak se nachází na okraji oka a jeho maximální hodnota je $p_1 = 3320,6$ MPa. Takto vysoký tlak je způsoben téměř bodovým kontaktem mezi okem šroubu a tělesem a je dán tím, že jsme volili lineárně pružný materiál. Kdybychom vyměnili model materiálu na lineárně pružně-plastický materiál, dostali bychom nižší hodnotu stykového tlaku. Je také možno zpozorovat, že kontaktní oblast je velmi malá proti kontaktní oblasti u modelu zatížení b).

U modelu zatížení b) je patrné, že maximální hodnota stykového tlaku je taktéž na okraji oka. Proti variantě (a) stykový tlak působí po celé délce vnitřního povrchu. Maximální hodnota stykového tlaku $p_2 = 89,72$ MPa.

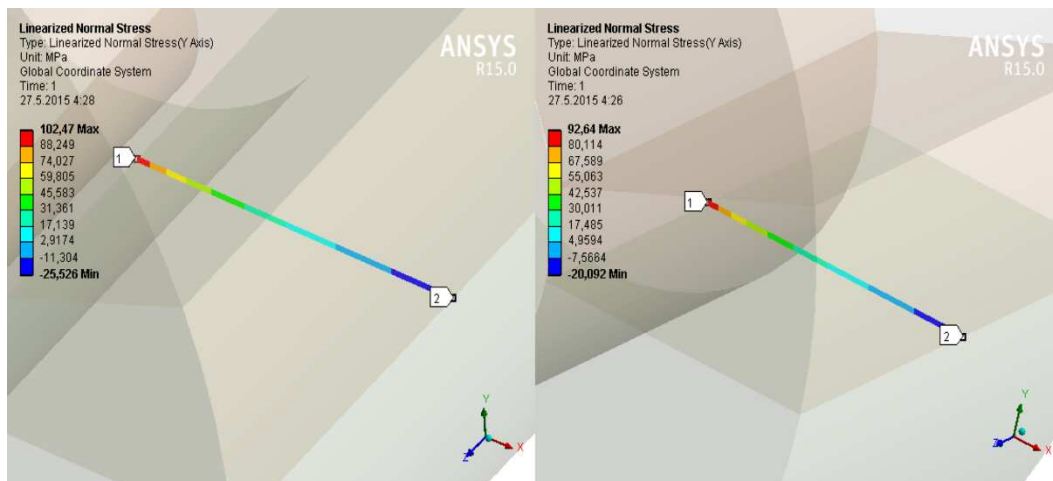


Obr. 49: Rozložení stykového tlaku v oku šroubu (Prvek SOLID)

Linearizovaný průběh normálového napětí ve směru osy y po příčném průřezu B je možno vidět na Obr. 50. Z obrázku je patrné, že průběh napětí je velmi podobný. Vlevo se nachází průběh varianty a), vpravo varianty b).

Hodnota normálového napětí na střednici při zatížení malým tělesem (a) na vnitřním povrchu oka šroubu $\sigma_{B1} = 105,61$ MPa a na vnějším povrchu $\sigma_{B2} = -25,46$ MPa.

U varianty zatížení (b), tedy zatížení velkým tělesem je hodnota normálového napětí na vnitřním povrchu oka šroubu $\sigma_{B1} = 96,69$ MPa a na vnějším povrchu $\sigma_{B2} = -19,94$ MPa.



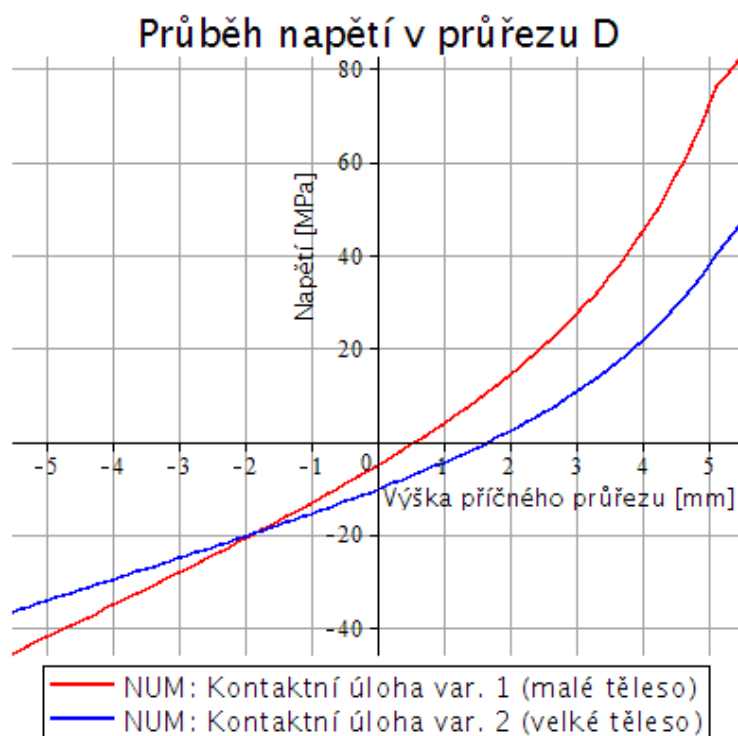
Obr. 50: Linearizovaný průběh normálového napětí v ose y po příčném průřezu B oka šroubu (Prvek SOLID)

Z důvodu přehlednosti byly hodnoty extrémních napětí vloženy do Tab. 8.

	σ_{D1}	σ_{D2}	σ_{B1}	σ_{B2}
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
Malé těleso	82,63	-45,60	102,47	-25,47
Velké těleso	46,73	-36,64	92,64	-20,09

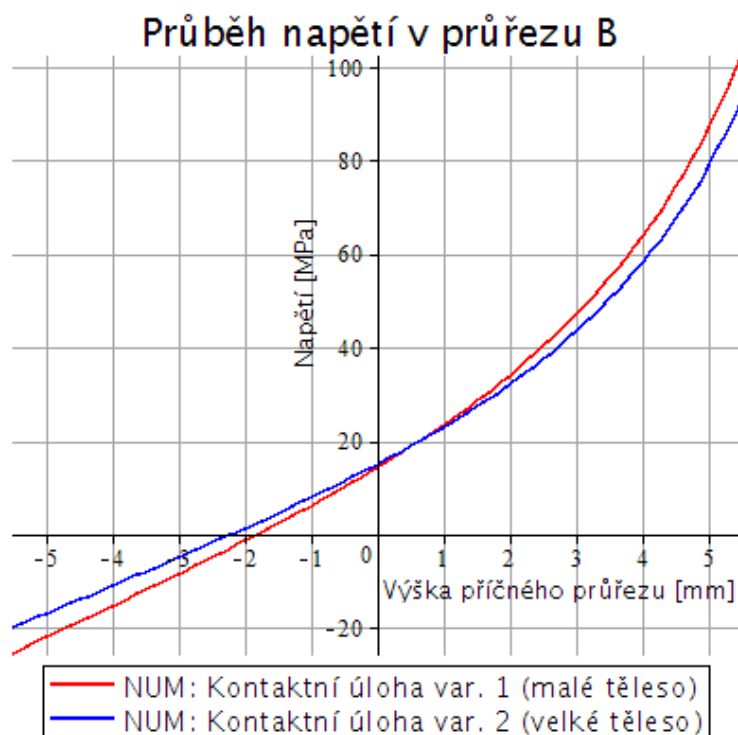
Tab. 8: Extrémní napětí v oku šroubu (Prvek SOLID)

Průběh napětí v příčném průřezu D je zobrazen na Obr. 51. Jsou v něm zahrnuty oba modely zatížení. Z grafu lze usoudit, že průběh napětí varianty zatížení a) je odlišný od průběhu napětí varianty zatížení b).



Obr. 51: Průběh napětí v příčném průřezu D oka šroubu (Prvek SOLID)

Průběh napětí v příčném průřezu B je zobrazen na Obr. 52.



Obr. 52: Průběh napětí v příčném průřezu B oka šroubu (Prvek SOLID)

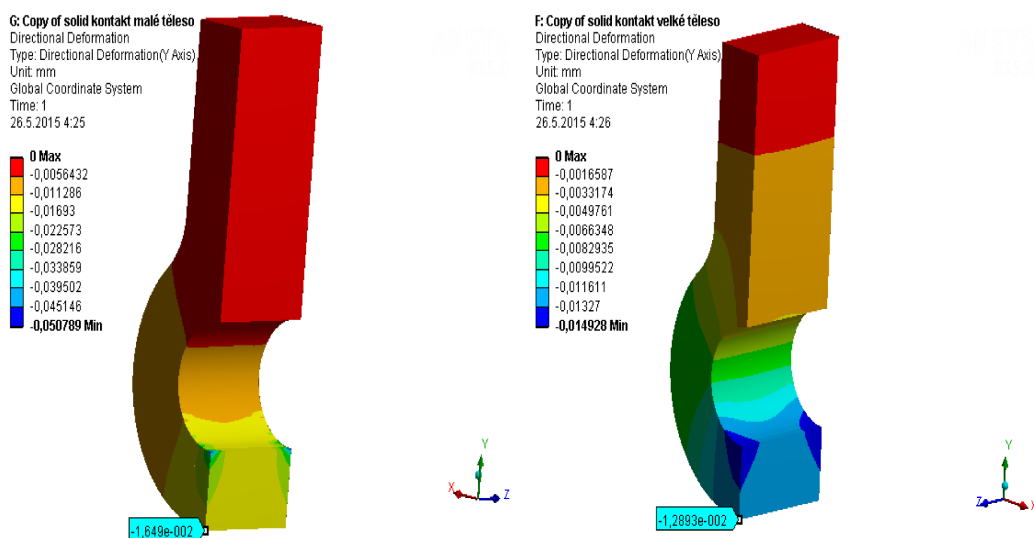
Z hlediska deformace byla vyhodnocena (stejně jako u předchozích prvků) deformace ve směru osy y, tedy ve směru působení síly (viz Obr. 53). Vlevo na obrázku se nachází deformace varianty a), vpravo varianty b).

Pro variantu zatížení a) je hodnota posunutí ve směru osy y na vnějším povrchu oka šroubu (z hlediska MSD):

$$\delta_{CD} = 0.0165 \text{ mm}$$

Pro variantu zatížení b) je hodnota posunutí ve směru osy y na vnějším povrchu oka:

$$\delta_{CD} = 0.0129 \text{ mm}$$



Obr. 53: Deformace ve směru působení síly (osy y) oka šroubu (Prvek SOLID)

6.3 Porovnání výsledků a jejich diskuze

Bylo provedeno sedm deformačně napět'ových analýz oka šroubu, z čehož dvě byly podle analytických teorií a pět dle numerického přístupu v softwaru ANSYS Workbench 15.

V místě dostatečně vzdáleném od oblasti zatížení (místo B) se průběhy napětí podobají. Hodnoty extrémního napětí se při vyhodnocení analytickým způsobem dle teorie silně zakřivených prutů v porovnání s případy „NUM: Rovinná úloha var. 1 (síla v uzlu)“, „NUM: Rovinná úloha var. 2 (síla na hraně)“, „NUM: Kontaktní úloha var. 1 (malé těleso)“ a „NUM: Kontaktní úloha var. 2 (velké těleso)“ neliší více jak o 14%. Hodnoty získané pomocí teorie slabě zakřivených prutů a prvku Beam se liší přibližně o 25,5%. Tyto dvě metody jsou tedy nevhodné pro vyhodnocování napjatosti u silně zakřivených prutů.

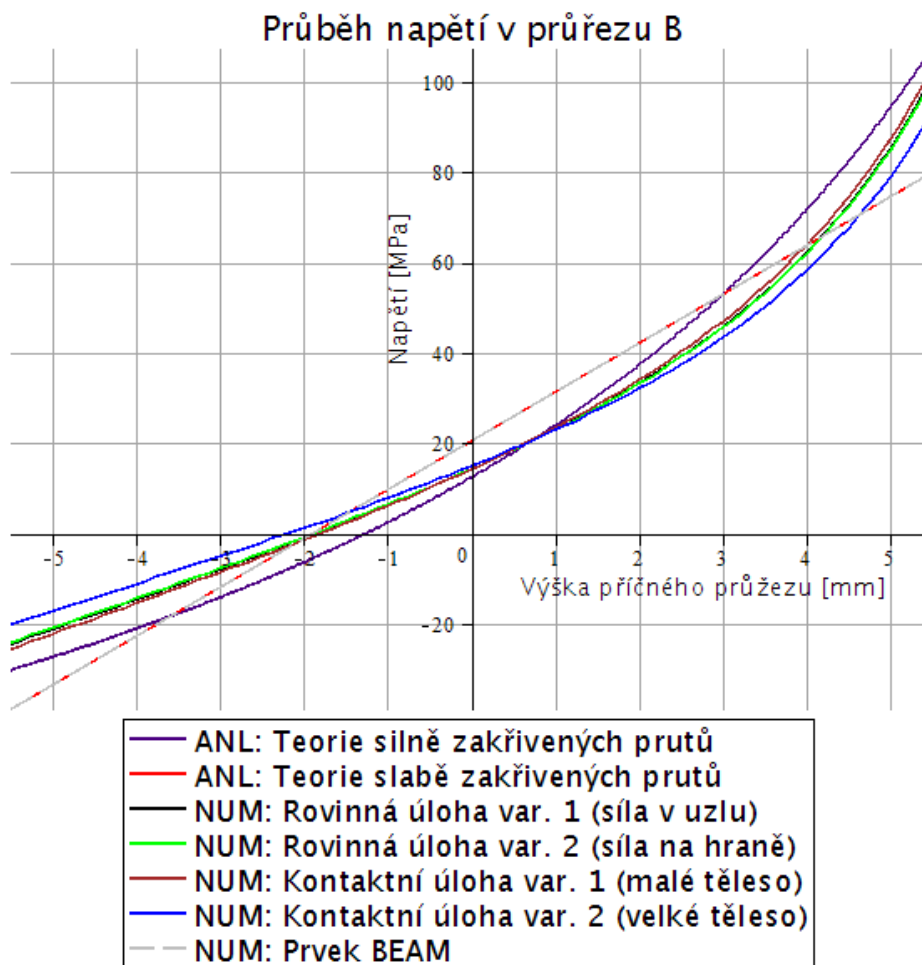
Na stejném průřezu (místo B) na vnějším povrchu oka šroubu se hodnoty extrémního napětí liší dle různých metod řešení a zatížení od přibližně 15% do 34%. Jelikož jsou na vnějším povrchu zpravidla nižší hodnoty napětí než na vnitřním povrchu, tato chyba je teoreticky zanedbatelná.

Hodnoty extrémních napětí všech analýz na příčném průřezu B oka šroubu jsou zobrazeny spolu s odchylkou napětí od teorie silně zakřivených prutů v Tab. 9.

	σ_{B1}	σ_{B2}	$\Delta\sigma_{B1}$	$\Delta\sigma_{B2}$
	[MPa]	[MPa]	[%]	[%]
ANL: Teorie silně zakřivených prutů	107,39	-30,21	-	-
ANL: Teorie slabě zakřivených prutů	80,04	-38,72	25,47	28,17
NUM: Prvek Beam	80,10	-38,75	25,41	28,26
NUM: Rovinná úloha var. 1 (síla v uzlu)	100,63	-24,36	6,29	19,36
NUM: Rovinná úloha var. 2 (síla na hraně)	100,16	-24,03	6,73	20,45
NUM: Kontaktní úloha var. 1 (malé těleso)	102,47	-25,47	4,58	15,69
NUM: Kontaktní úloha var. 2 (velké těleso)	92,64	-20,09	13,73	33,49

Tab. 9: Porovnání vypočtených hodnot extrémního napětí na příčném průřezu B oka šroubu

Výsledný průběh napětí po průřezu B lze vidět na Obr. 54. I z průběhu napětí je vidno, že vyhodnocování podle analytické teorie slabě zakřivených prutů a prvku Beam je nesprávné. Ostatní křivky označující zbylé analýzy jsou hyperbolické. Jak z hodnot extrémních napětí, tak i z grafu průběhů napětí je patrné, že i když se při výpočtu dle analytické teorie silně zakřivených prutů dopustíme chyby, hodnoty této teorie jsou ve všech bodech na průřezu B vyšší než při ostatních analýzách, což znamená konzervativnější řešení.



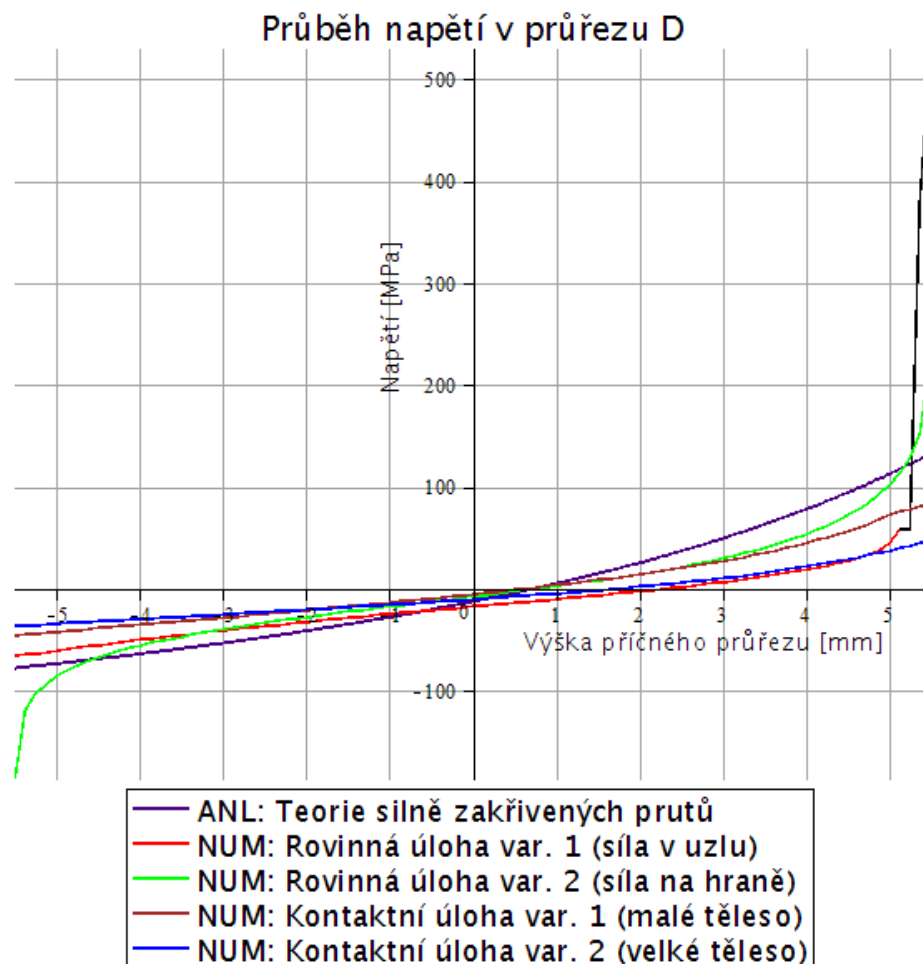
Obr. 54: Porovnání všech průběhů napětí po příčném průřezu B oka šroubu

Jiná situace nastává v místě zatížení. V případě lokálního působení jedné síly je v blízkosti vnitřního povrchu napětí několikanásobně (přibližně 4 krát, při dané jemnosti sítě) větší, než jaké je získané pomocí analytické teorie. Z hodnot uvedených v Tab. 10 je taky patrné, že samotná teorie silně zakřivených prutů se ani zdaleka neshoduje s kontaktními úlohami, které by měli být nejrealističtější. Tento nedostatek by šlo doplnit dalším výpočtem, a to stykového tlaku dle Hertzovy teorie. Po sečtení hodnot vypočtených dle teorie silně zakřivených prutů a Hertzova tlaku bychom se měli blížit k hodnotám kontaktních úloh zjištěných numerickým způsobem.

	σ_{D1}	σ_{D2}	$\Delta\sigma_{D1}$	$\Delta\sigma_{D2}$
	[MPa]	[MPa]	[%]	[%]
ANL: Teorie silně zakřivených prutů	132,75	-77,86	-	-
ANL: Teorie slabě zakřivených prutů	104,03	-104,03	21,63	33,61
NUM: Prvek Beam	104,03	-104,03	21,63	33,61
NUM: Rovinná úloha var. 1 (síla v uzlu)	530,01	-66,10	299,25	15,11
NUM: Rovinná úloha var. 2 (síla na hraně)	227,79	-185,87	71,59	138,72
NUM: Kontaktní úloha var. 1 (malé těleso)	82,63	-45,60	37,76	41,44
NUM: Kontaktní úloha var. 2 (velké těleso)	46,73	-36,64	64,80	52,94

Tab. 10: Porovnání vypočtených hodnot extrémního napětí na příčném průřezu D oka šroubu (v místě zatížení)

Z grafu průběhů napětí po příčném průřezu D oka šroubu (viz Obr. 55) již byly odebrány křivky analytické teorie slabě zakřivených prutů a prvek Beam podle dříve zmíněného důvodu. Ovlivnění oblasti vnitřního povrchu oka umělým lokálním koncentrátorem napětí bylo v případě „NUM: Rovinná úloha var. 1 (síla v bodě)“ označeno černou barvou.



Obr. 55: Porovnání průběhů napětí po příčném průřezu D oka šroubu

Z uvedených hodnot extrémních napětí a průběhu napětí po příčných průřezích lze vidět, že všechny metody určují maximální napětí na vnitřním povrchu příčného průřezu D až na jednu. U metody pojmenované „NUM: Kontaktní úloha var. 2 (velké těleso)“, kde jsme oko šroubu zatěžovali tělesem o přibližně stejném poloměru jako je poloměr oka, vychází vyšší napětí (přibližně 2x) v příčném průřezu B než v příčném průřezu D.

Pokud se podíváme na deformaci oka šroubu, resp. posunutí mezi příčnými průřezy C a D, zjistíme, že v porovnání analytického řešení podle teorie silně zakřivených prutů s ostatními modely dochází k chybě od přibližně 6% do 27%. Dle hodnot uvedených v Tab. 11 však vidíme, že hodnota posuvu dle teorie silně zakřivených prutů je z ostatních modelů nejvyšší za předpokladu, že analytické řešení dle teorie slabě zakřivených prutů a prvek beam zanedbáme z dříve zmíněných důvodů. Počítáme tedy s určitou chybou, ale jsme konzervativnější. Je však potřeba zmínit, že hodnoty deformace u numerického přístupu byly brány na vnějším povrchu oka s ohledem na mezní stav deformace.

	δ_{CD}	$\Delta\delta_{CD}$
	[mm]	[%]
ANL: Teorie silně zakřivených prutů	0,0176	-
ANL: Teorie slabě zakřivených prutů	0,0189	7,39
NUM: Prvek Beam	0,0189	7,39
NUM: Rovinná úloha var. 1 (síla v uzlu)	0,0146	17,05
NUM: Rovinná úloha var. 2 (síla na hraně)	0,0156	11,36
NUM: Kontaktní úloha var. 1 (malé těleso)	0,0165	6,25
NUM: Kontaktní úloha var. 2 (velké těleso)	0,0129	26,70

Tab. 11: Porovnání hodnot posuvu mezi příčnými průřezy C a D

Je potřeba zdůraznit, že kdybychom analytickými teoriemi počítali velikost posuvu pouze se složkou ohybového momentu, výpočet by byl velmi nepřesný (viz Tab. 4). Velikost příspěvků posouvající síly s klesajícím poměrem R/h roste a naopak vliv příspěvku ohybového momentu klesá. Lze tedy konstatovat tu skutečnost, že u silně zakřiveného tělesa je nutno pro výpočet deformace uvažovat i ostatní příspěvky VVÚ.

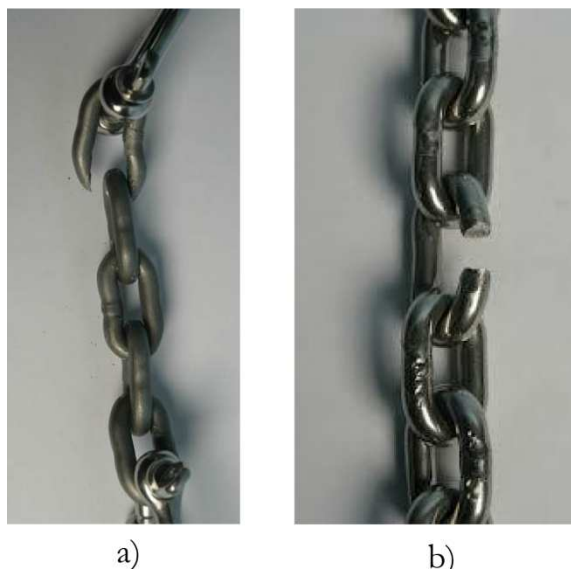
7 Další tělesa

Jako další tělesa, která by mohla být řešena stejným způsobem, můžeme označit například článek článkového řetězu či jeřábový hák.

Článek řetězu sám o sobě nemá kruhový příčný průřez. Každopádně jeho geometrie je kruhovému průřezu velmi podobná a pro analytický výpočet je vhodné si takto výpočet zjednodušit. Jedná se tedy taktéž o silně zakřivené těleso, které má však dvě části, a to část zakřivenou a část přímou. Jelikož článkové řetězy bývají nejčastěji svařované, můžou nastat tři případy, kdy by došlo k jeho porušení.

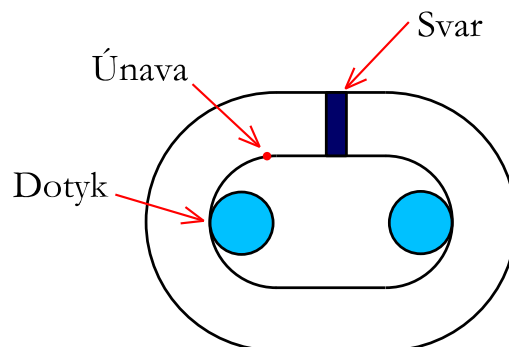
První případ porušení je v místě dotyku a je zobrazen na Obr. 56a. Lze si povšimnout, že u řetězu došlo k elastickým i plastickým deformacím ve všech člancích řetězu. Takového postupné a progresivní selhání je žádoucí.

Na Obr. 56b je zobrazeno porušení v místě svaru nebo v jeho těsné blízkosti. Toto porušení vzniká nedostatečným či nedokonalým svařením. Taktéž je viditelné, že k porušení řetězu došlo dříve, než se stačili v jednotlivých člancích projevit plastické deformace.



Obr. 56: Porušení článkového řetězu a) v místě dotyku, b) v místě svaru [9]

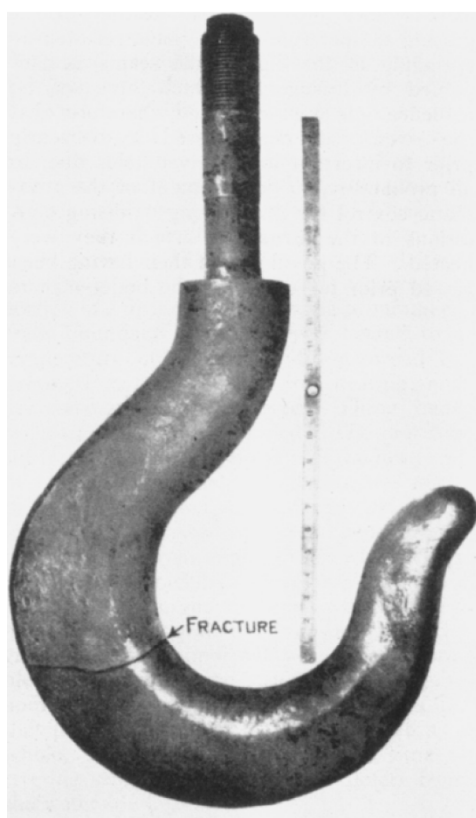
Třetí způsob porušení vzniká důsledkem únavy materiálu, a to v místě přechodu zakřivené části do části přímé (viz Obr. 57).



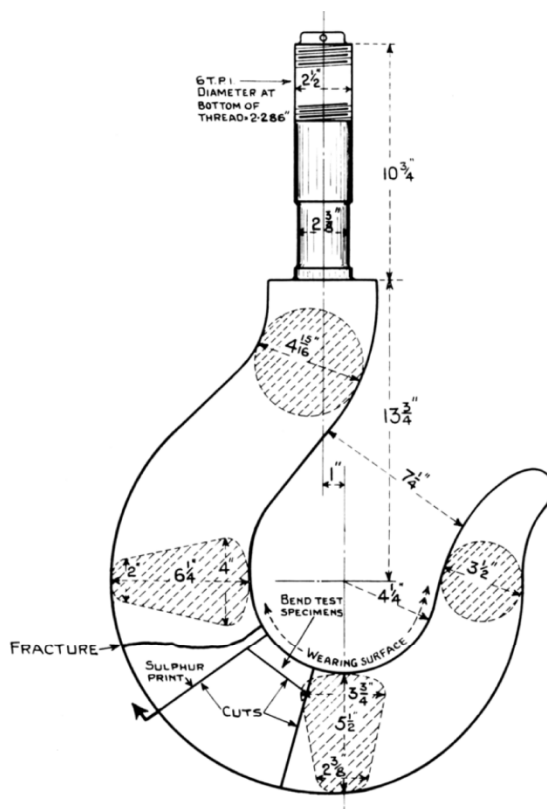
Obr. 57: Místa porušení článku řetězu

Vyhodnocení deformace a napjatosti u jeřábového háku analytickým způsobem je velmi složité a to z toho důvodu, že jeho geometrie je sama o sobě složitá. Jeho příčný průřez se nejvíce podobá lichoběžníkovému tvaru, jenže je po délce střednice proměnný. Pokud bychom tedy provedli nahrazení příčného průřezu lichoběžníkem, dopustíme se tím zásadní chyby, neboť budeme ignorovat vliv smykových napětí, která rostou s rostoucí neprizmaticností průřezu. Můžeme také říci, že „platné“ řešení, tak, aby byly zahrnuty všechny podstatné vlivy, je v dnešní době už nad úrovní znalostí běžného inženýra a většinou se k řešení D-N analýzy přistupuje pouze numericky.

Na Obr. 58 je zobrazeno porušení jeřábového háku. Více ohledně jeho porušení viz [10].



a)



b)



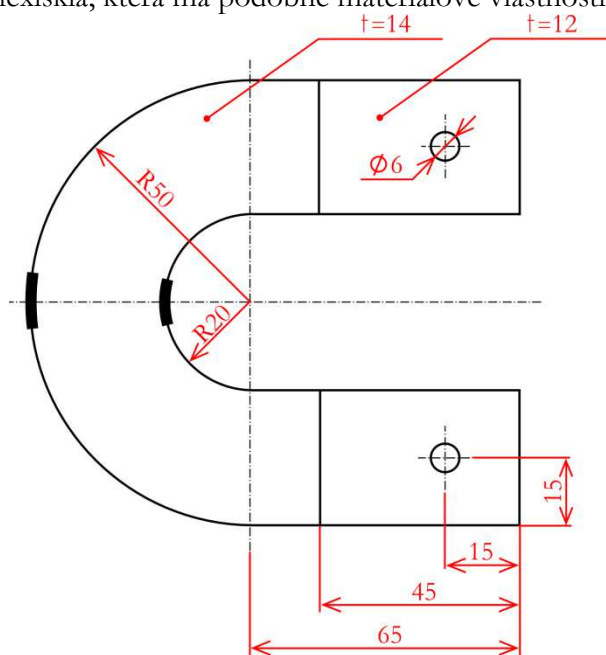
c)

Obr. 58: Porušení jeřábového háku [10]

8 Experiment

8.1 Prokázání teorie silně zakřivených prutů

Cílem experimentu bylo prokázat, že teorie silně zakřivených prutů je platná a v praxi se vyskytující. Do experimentální soustavy, na které bylo měření provedeno, byl vložen prut tvaru podkovy z novoduru, který má v oblasti zakřivení nalepené tenzometry (uvnitř i vně poloměru), viz Obr. 59. Na prutu byla nalepena 2mm vysoká ploška z plexiskla, která má podobné materiálové vlastnosti jako novodur.

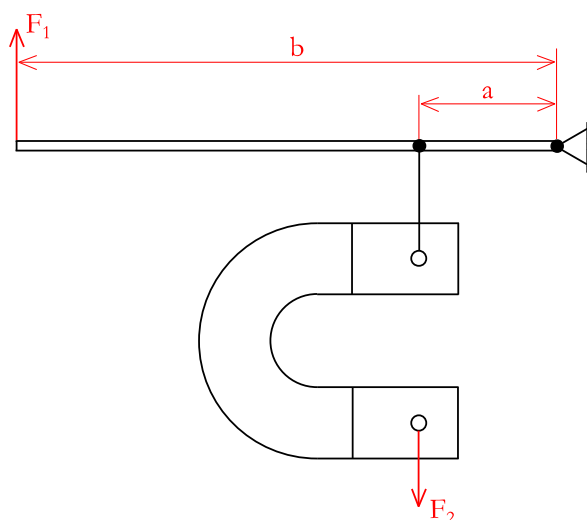


Obr. 59: Náčrsk prutu včetně rozměrů a míst s tenzometry

Z rozměrů je patrné, že se jedná o silně zakřivený prut, neboť platí:

$$\frac{R}{h} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{2}}{R_2 - R_1} = \frac{35}{30} = 1,167$$

Prut je namáhán na ohyb silou F_2 . Tato síla je vyvolána přes rameno silou F_1 měřenou siloměrem (viz Obr. 60). Rozměry $a = 260$ mm, $b = 770$ mm.

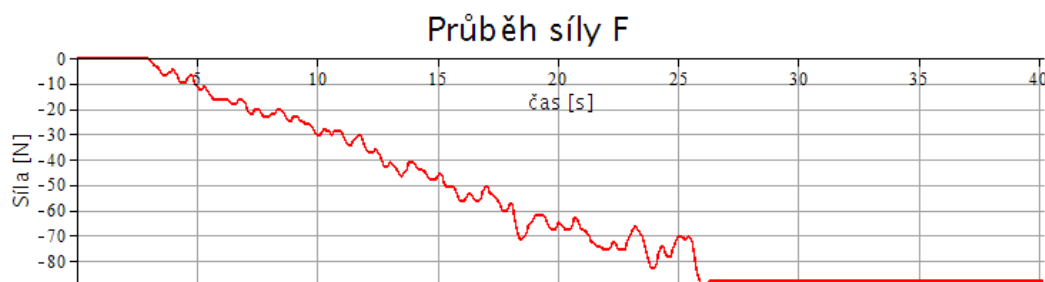


Obr. 60: Náčrsk zatěžování prutu

Oba tenzometry byly zapojeny do polovičního mostu a připojeny k měřicí ústředně. Bylo potřeba změřit přetvoření na krajích prutu a tím popsat rozložení napětí po šířce průřezu prutu. Tato naměřená přetvoření na krajích prutu následně přepočítat na napětí a porovnat s analytickým a numerickým řešením.

8.1.1 Řešení pomocí odporové tenzometrie

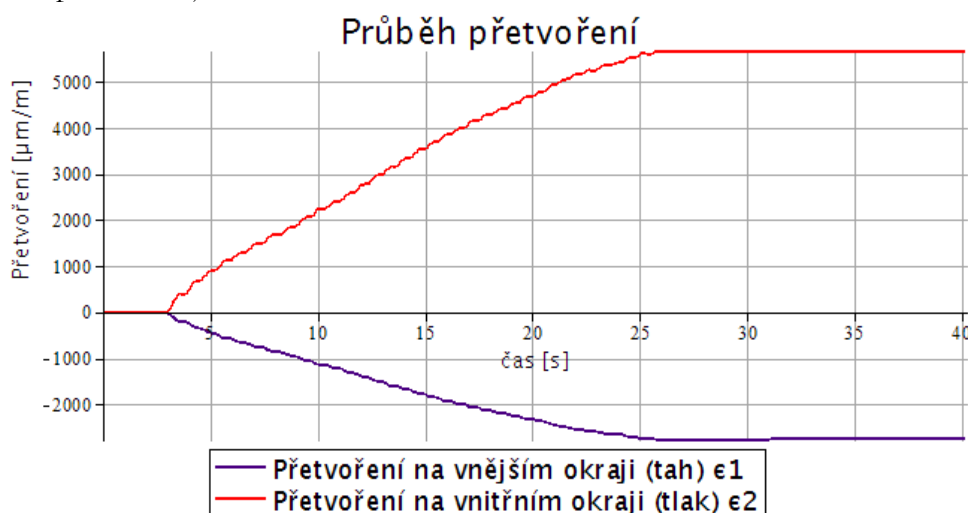
Tenzometry zapojíme a začneme měřit. Postupně zvyšujeme sílu F_1 . Když se zatížení zdá dostatečné, necháme aparaturu ustálit a pak vypneme. Průběh zatěžující síly je zobrazen na Obr. 61.



Obr. 61: Průběh síly v závislosti na čase

Hodnoty z ustáleného stavu zprůměrujeme a dostaneme sílu měřenou siloměrem $F_1 = 88,17\text{N}$ (znaménko v tomto případě nehraje žádnou roli). Tuto hodnotu použijeme pro další výpočty.

Průběh přetvoření je znázorněn na Obr. 62.



Obr. 62: Průběh přetvoření v závislosti na čase

Stejným způsobem, jako sílu F , stanovíme přetvoření $\varepsilon_1 = 5649,75\ \mu\text{m}/\text{m}$ a $\varepsilon_2 = -2758,37\ \mu\text{m}/\text{m}$. Pro přepočet přetvoření na napětí musíme znát Youngův modul pružnosti E novoduru:

$$E = 2500\text{ MPa}$$

Jelikož se pohybujeme v oblasti elastických deformací, můžeme využít Hookova zákona pro přepočet přetvoření na napětí:

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 = 2500 \cdot (0,00564979) = 14,12\text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = E \varepsilon_2 = 2500 \cdot (-0,00275837) = -6,90\text{ MPa}$$

8.1.2 Analytické řešení

Protože neutrální plocha není totožná se střednicí prutu, je potřeba ji určit:

$$r = \frac{S}{\int_{\psi} \frac{dS}{\rho}} = \frac{bh}{b \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{R_2 - R_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = 32,74 \text{ mm}$$

Vzdálenost neutrální plochy od střednice prutu:

$$e = \frac{R_1 + R_2}{2} - r = 2,26 \text{ mm}$$

Zatěžující síla měřená siloměrem musí být přepočítána do místa působení. Využijí podmínku statické rovnováhy (viz Obr. 60).

$$F_2 = \frac{F_1 b}{a} = \frac{88,17 \cdot 770}{260} = 261,12 \text{ N}$$

Ohybový moment vyvozený silou F_2 v místě vzdáleném od působení $l = 85 \text{ mm}$ je:

$$M_o = F_2 l = 22195,20 \text{ Nmm}$$

Ohybové napětí v libovolném místě průřezu z získáme ze vztahu:

$$\sigma_o = \frac{M_o}{S e} \frac{z}{r - z} = 23,38 \cdot \frac{z}{r - z} \text{ MPa}$$

Smyková napětí v tomto experimentu zanedbáme, tahové napětí se bude rovnat:

$$\sigma_N = \frac{F_2}{S} = \frac{261,12}{420} = 0,62 \text{ MPa}$$

Celkové normálové napětí:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_o = 23,38 \cdot \frac{z}{r - z} + 0,62 \text{ MPa}$$

Průběh napětí určíme po příčném průřezu, tedy $z \in (-17,26 ; 12,74)$.



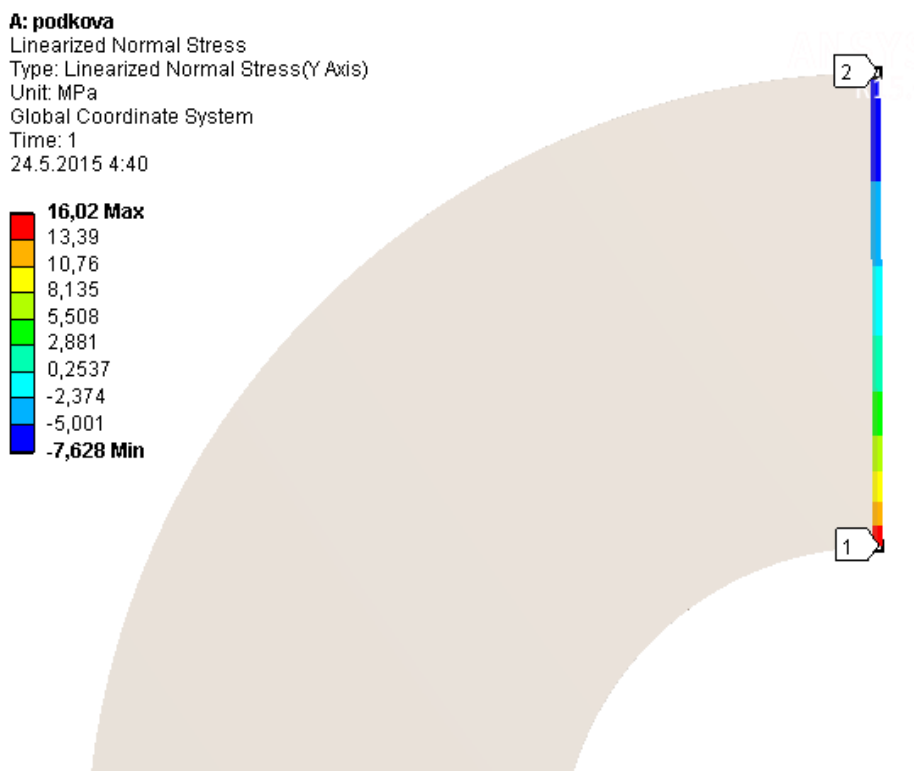
Obr. 63: Průběh napětí po příčném průřezu experimentálního tělesa analytickým přístupem

Hodnota na vnitřním povrchu $\sigma_1 = 15,52 \text{ MPa}$ a na vnějším $\sigma_2 = -7,45 \text{ MPa}$.

8.1.3 Numerické řešení

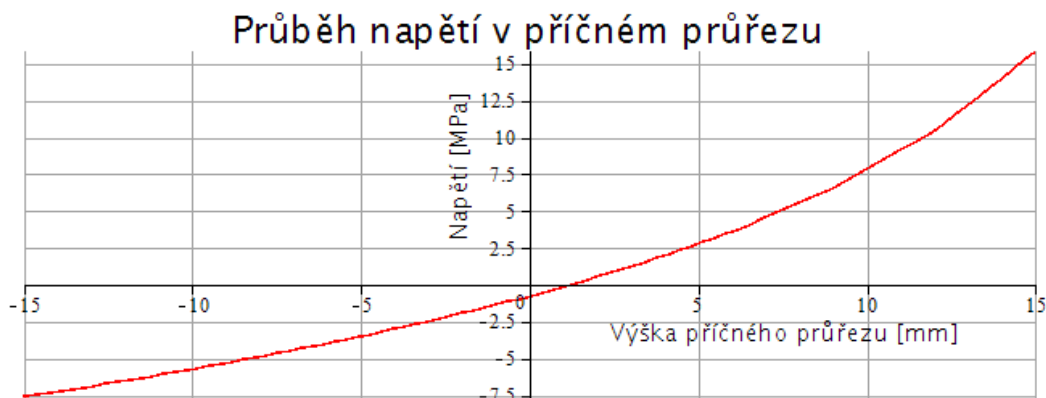
Těleso ve tvaru podkovy modelujeme v softwaru ANSYS Workbench 15 pomocí prvků SOLID 186. Geometrie součásti dovoluje řešit úlohu jako symetrickou. Zatížení je provedenou silou F_2 v otvoru. Jelikož novodur s plexisklem mají podobný modul pružnosti, model byl vytvořen pouze jako jeden celek.

Byl proveden výpočet, ve kterém nás zajímalo normálové napětí, respektive průběh normálového napětí po průřezu v místě, kde byly nalepeny tenzometry. Na vnitřním povrchu vyšlo napětí o hodnotě $\sigma_1 = 16,02 \text{ MPa}$ a na vnějším povrchu $\sigma_2 = -7,63 \text{ MPa}$.



Obr. 64: Linearizované normálové napětí ve směru osy y v příčném průřezu experimentálního tělesa

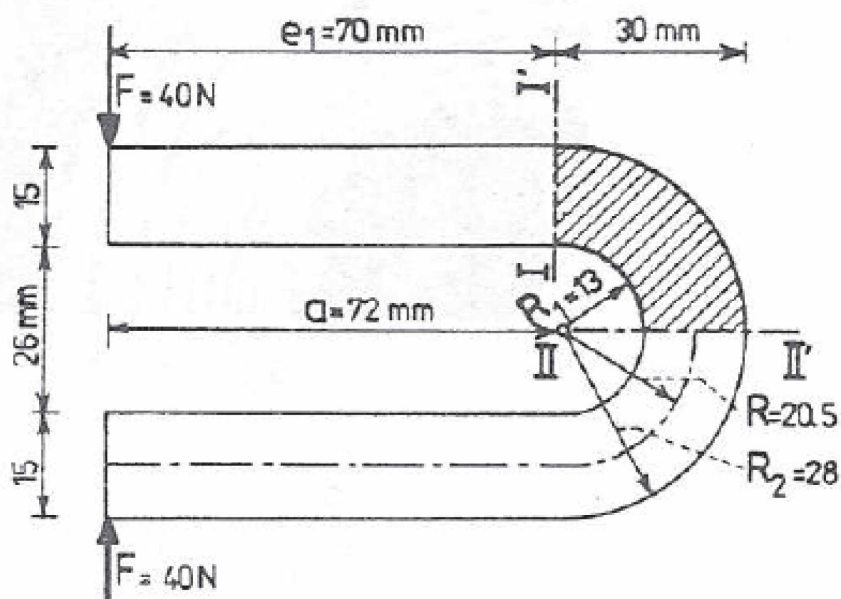
Průběh napětí lze vidět taktéž v grafu na Obr. 65.



Obr. 65: Průběh normálových napětí po průřezu experimentálního tělesa numerickým přístupem

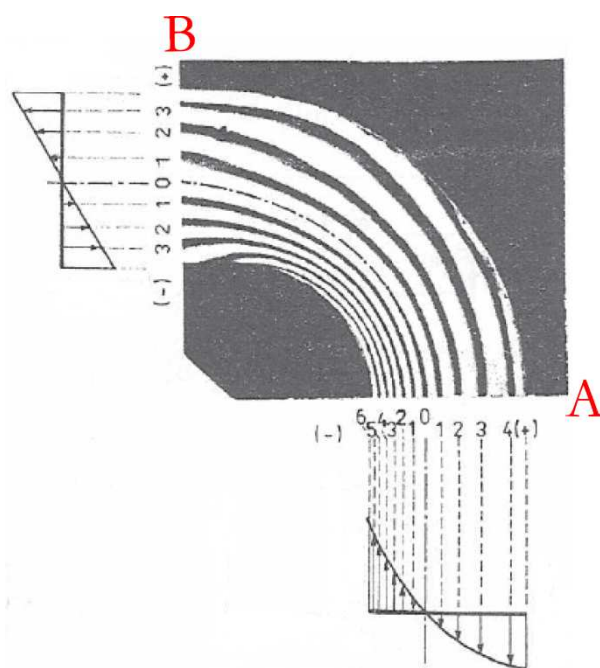
8.1.4 Řešení pomocí fotoelasticimetrie

V publikaci [11] bylo řešeno silně zakřivené těleso (podobné tělesu v kap. 8.1) experimentální metodou, fotoelasticití (viz Obr. 66).



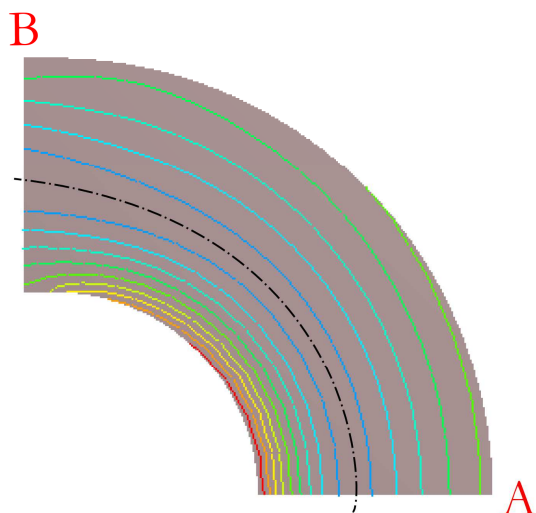
Obr. 66: Schéma tělesa vyhodnoceného pomocí fotoelasticimetrie [11]

Výsledek experimentu je zobrazen na Obr. 67. Na obrázku lze vidět izochromaty a izoklíny. Ty se v průřezu označeném písmenem A koncentrují směrem k vnitřnímu povrchu tělesa. Tento jev je důsledkem hyperbolického průběhu napětí v daném průřezu. Naopak v průřezu B, kde již těleso přešlo ze zakřivené části do přímé, lze vidět, že izoklíny jsou zde víceméně rovnoměrně rozděleny, což je důsledkem lineárního průběhu napětí.



Obr. 67: Výsledek experimentu fotoelasticimetrie silně zakřiveného prutu [11]

Stejná úloha byla vymodelována pomocí metody konečných prvků v softwaru ANSYS Workbench 15. Bylo pozorováno, jak velký rozdíl nastane mezi experimentem provedeným fotoelasticitami a modelem vytvořeným pomocí MKP. Těleso bylo modelováno v podmínkách rovinné napjatosti s užitím prvku PLANE183. Lze usoudit, že izokřivky vzniklé pomocí MKP jsou si velmi podobné, ne-li shodné (viz Obr. 68). Čerchovanou čarou je zde znázorněna přibližná poloha neutrální osy. Je patrné, že v průřezu A je neutrální osa posunuta směrem k vnitřnímu povrchu tělesa. Naopak pokud budeme pozorovat místo již jen mírně vzdálené od zakřivení, čemuž odpovídá průřez B, je možno opět předpokládat, že neutrální osa se shoduje se střednicí.



Obr. 68: Izokřivky na silně zakřiveném tělese

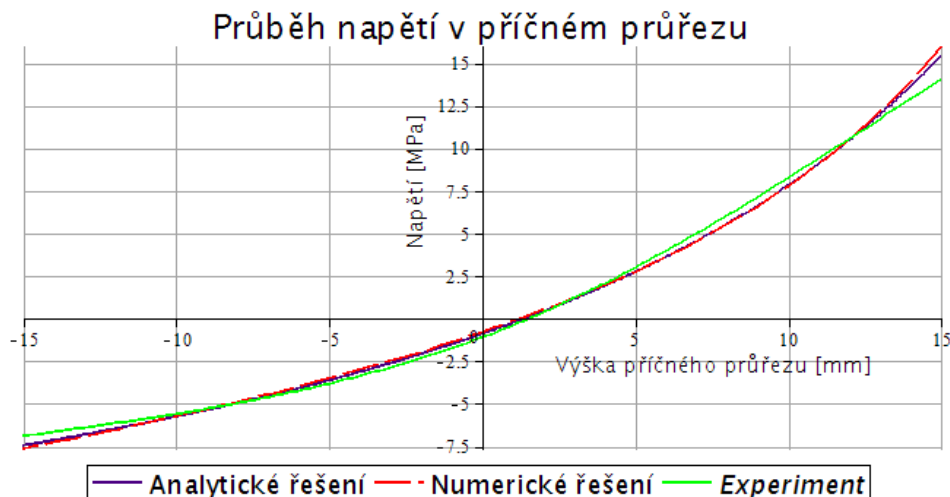
8.2 Porovnání výsledků experimentů a jejich diskuze

Bylo provedeno experimentální měření na silně zakřivené součásti ve tvaru podkovy pomocí odporové tenzometrie. Pro srovnání s výsledky měření byla provedena napjatostní analýza dle analytické teorie silně zakřivených prutů a dle numerického řešení v softwaru ANSYS Workbench 15. Jednotlivá extrémní napětí na vnitřním i vnějším povrchu jsou srovnána v Tab. 12 i s odchylkou od naměřených hodnot. Lze vidět, že odchylka se pohybuje v rozmezí od 8 do 13 procent. Tyto výsledky lze předpokládat za platné. Určitá chybovost je způsobena všudypřítomným šumem.

	σ_1	σ_2	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$
	[MPa]	[MPa]	[%]	[%]
Experiment	14,12	-6,90	-	-
Analytické řešení	15,52	-7,45	9,89	8,06
Numerické řešení	16,02	-7,63	13,40	10,62

Tab. 12: Porovnání extrémních napětí v příčném průřezu experimentálního tělesa

Pokud se podíváme na průběhy napětí jednotlivých metod, které byly k vyhodnocení provedeny, zjistíme, že všechny mají hyperbolický charakter, což potvrzuje teorii silně zakřivených prutů. Odchylka mezi analytickým a numerickým řešením nepřesáhne 5%, což lze posoudit jako dobrou shodu. Průběh napětí experimentu byl aproximován, a to pomocí hodnot získaných měření z tenzometrů na krajních vláknech průřezu a předpokládanou neutrální osou, kterou jsme si vypočetli v analytickém řešení.



Obr. 69: Porovnání průběhů napětí v příčném průřezu experimentálního tělesa

Cíl tohoto experimentu byl splněn. Je jednoznačně prokázáno, že průběh napětí v příčném průřezu „podkovy“ je hyperbolický a je tedy nezpochybnitelně prokázána platnost analytické teorie silně zakřivených prutů.

Byl také proveden rozbor napjatosti silně zakřiveného tělesa, který byl v publikaci [11] vyhodnocen pomocí experimentální metody zvané fotoelasticimetrie. Tyto výsledky byly porovnány s vytvořeným modelem pomocí metody konečných prvků. Došlo se k závěru, že vykreslené izokřivky pomocí MKP jsou velmi podobné, ne-li shodné s izokřivkami, které byly vyhodnoceny fotoelasticimetrií. Neutrální osa se vzhledem k poloze zakřivení posouvá blíže k vnitřnímu povrchu tělesa od střednice. Lze tedy říci, že i pomocí tohoto rozboru experimentu byla prokázána platnost analytické teorie silně zakřivených prutů.

9 Závěr

V práci byla řešena deformačně napět'ová analýza tělesa s výrazně zakřivenou střednicí, konkrétně šroubu s okem. Práce je rozdělena na tři části, a to na část rešeršní, výpočtovou a experimentální.

V rešeršní části bylo sepsáno podrobné odvození vztahů pro řešení napjatosti i deformace v tělese dle analytické teorie silně i slabě zakřivených prutů. Taktéž byly ve zkratce sepsány základní poznatky o odporové tenzometrii, fotoelasticimetrii a metodě konečných prvků.

Ve výpočtové části byl řešen konkrétní příklad silně zakřiveného tělesa, a to šroub s okem. Byl analyzován případ, kdy by těleso sloužilo jako závěsné se zavěšenou hmotou o hmotnosti přibližně jedné tuny. Bylo provedeno sedm variant řešení, z čehož dvě dle analytických teorií a pět variant dle numerického přístupu na různých úrovních výpočtového modelování. Výsledky byly mezi sebou porovnány a vyhodnoceny v kapitole 6.3. Dále byly rozebrány další tělesa, která lze charakterizovat jako silně zakřivená. Jedná se o článek článkového řetězu a jeřábový hák. Tyto tělesa již v práci řešena nejsou z toho důvodu, že by práce byla velmi rozsáhlá.

V části experimentální byl proveden experiment, který měl za cíl prokázat, že na vnitřním povrchu v zakřivené části tělesa dochází k větší koncentraci napětí než na povrchu vnějším a prokázat tak platnost analytické teorie silně zakřivených prutů. Tento experiment byl proveden na tělese ve tvaru podkovy pomocí odporové tenzometrie. Byl také porovnán experiment provedený na silně zakřivené části tělesa pomocí fotoelasticimetrie publikované v [11] s výsledky získanými pomocí MKP. Výsledky experimentu byly porovnány a vyhodnoceny v kapitole 8.2.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I.* 3., přeprac. vyd., v Akademickém nakl. CERM 1. Brno: CERM, 2004, 287 s. ISBN 80-214-2592-x.
- [2] VRBKA, Jan, PRUŽNOST A PEVNOST I: Učební text, 280 s. [online]. [2012] [cit. 2014-05-26]. Dostupné (po přihlášení) z: <https://www.vutbr.cz/elearning/mod/resource/view.php?id=207264>
- [3] MIROLJUBOV, I, Zdeněk KULIŠ, Oldřich SPANILÝ a Ladislav ŠUBRT. *Řešení úloh z pružnosti a pevnosti: vysokošk. učebnice.* Dotisk 2. vyd. Praha: SNTL, 1982, 504 s.
- [4] *Timoshenko beam theory - Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. Wikipedia [cit. 2015-05-26]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Timoshenko_beam_theory
- [5] *Galerie* [online]. [cit. 2015-05-27]. Dostupné z: <http://experimenty.fd.cvut.cz/galery.html>
- [6] *Polarizace světla* [online]. [cit. 2015-05-26]. Dostupné z: http://kvinta.html.wz.cz/fyzika/optika/vlnova_optika/polarizace_svetla.htm
- [7] ANSYS, Inc., *Ansys 15 Help*
- [8] DIN 444. *Eye bolts.* Berlin: DIN Deutsche Institut für Normung, 1983.
- [9] *Connectors* [online]. [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <https://coxengineering.sharepoint.com/Pages/Connectors.aspx>
- [10] *Brittle Fracture of a Crane Hook* [online]. [cit. 2015-05-01]. Dostupné z: <http://products.asminternational.org/fach/data/fullDisplay.do?database=faco&record=1681&trim=false>
- [11] ŠEJNOHA, Jiří a Jitka BITTNAROVÁ. *Pružnost a pevnost 10.* 1. vyd. Praha: ČVUT, 1997, 163 s. ISBN 80-010-1485-1.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

Veličina / symbol	Jednotka	Popis
FSI		Fakulta Strojního Inženýrství
MKP		Metoda konečných prvků
MSD		Mezní stav deformace
VUT		Vysoké Učení Technické
VVÚ		Vnitřní výsledné účinky
ψ		Rovina symetrie / Příčný průřez
Ω		Základní prvek
b	[mm]	Šířka příčného průřezu
d_i	[mm]	Průměr oka
e	[mm]	Excentricita
E	[MPa]	Youngův modul pružnosti v tahu
F	[N]	Síla
G	[MPa]	Modul pružnosti ve smyku
h	[mm]	Výška příčného průřezu
J_v	[mm ⁴]	Osový kvadratický moment
K	[N/mm]	Matice tuhosti
l_i	[mm]	Délka
M_o	[Nmm]	Ohybový moment
N	[N]	Normálová síla
q	[N/mm]	Spojité zatížení
r	[mm]	Poloměr neutrální osy / plochy
R	[mm]	Poloměr zakřivení střednice
R_i	[mm]	Poloměr oka
S	[mm ²]	Plocha příčného průřezu
T	[N]	Posouvající síla
U	[mm]	Vektor posuvů uzlových bodů
U_v	[Nmm]	Lineární moment
W	[J]	Celková energie napjatosti
$W\sigma$	[J]	Energie napjatosti od normálových napětí
$W\tau$	[J]	Energie napjatosti od smykových napětí
β	[1]	Koeficient smyku
γ	[1]	Zkosení
δ	[mm]	Posunutí
$\Delta\delta$	[%]	Odchylka posunutí
$\Delta\sigma$	[%]	Odchylka napětí
ε	[1]	Délková přetvoření
μ	[1]	Poissonova konstanta
π	[1]	Ludolfovo číslo
ρ	[mm]	Poloměr křivosti po deformaci

σ_{ex}	[MPa]	Extrémní normálové napětí
σ_i	[MPa]	Normálové napětí
σ_N	[MPa]	Tahové / tlakové napětí
σ_o	[MPa]	Ohybové napětí
σ_r	[MPa]	Radiální napětí
σ_t	[MPa]	Obvodové napětí
τ	[MPa]	Smykové napětí
φ	[°]	Natočení / úhel

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Vliv síly F (a) a ohybového momentu M_o (b) na průřez zakřiveného prutu....	6
Obr. 2: Průběh napětí u přímého (a) a zakřiveného (b) prutu namáhaného ohybovým momentem	6
Obr. 3: Porovnání, kdy se jedná o silně/slabě zakřivený prut.....	7
Obr. 4: Sestava ukotvení lodí v přístavu	8
Obr. 5: Graf odchylek napětí v závislosti na poměru $R/h(d)$ kruhového rámu	9
Obr. 6: Zatížení rovinnou silovou soustavou v rovině prutu.....	10
Obr. 7: Základní prvek Ω_1 (a) a jeho příčný průřez ψ (b).....	11
Obr. 8: Deformační posuv natočených příčných průřezů (a) a příčný průřez v rovině xz (b)	11
Obr. 9: Extrémní napětí σ_{ex}	14
Obr. 10: Extrémní napětí σ_{ex}	18
Obr. 11: Obdélníkový průřez	19
Obr. 12: Schéma odporového tenzometru [5].....	22
Obr. 13: Vyhodnocení napjatosti v háku vázacího řetězu pomocí fotoelasticimetrie [6].....	23
Obr. 14: Spojitost prvků v MKP.....	24
Obr. 15: Geometrie prvku BEAM189 [7]	25
Obr. 16: Geometrie prvku PLANE 183 [7]	25
Obr. 17: Homogenní strukturální geometrie prvku SOLID 186 [7]	26
Obr. 18: Geometrie prvku CONTA 174 [7]	26
Obr. 19: Geometrie prvku TARGE 170 [7].....	27
Obr. 20: Ovlivněná oblast působením síly F	28
Obr. 21: Schéma šroubu s okem [8]	29
Obr. 22: Výpočtové modely oka šroubu.....	29
Obr. 23: Výsledný výpočtový model oka šroubu	30
Obr. 24: Vnitřní výsledné účinky šroubu s okem.....	30
Obr. 25: Určení ohybového momentu šroubu s okem	31
Obr. 26: Výsledné vnitřní účinky oka šroubu	32
Obr. 27: Průběh napětí v průřezu D oka šroubu (silně zakřivený prut)	35
Obr. 28: Průběh napětí v průřezu B oka šroubu (silně zakřivený prut)	36
Obr. 29: Průběh napětí v příčném průřezu D (slabě zakřivený prut).....	39
Obr. 30: Průběh napětí v příčném průřezu B (slabě zakřivený prut)	40
Obr. 31: Okrajové podmínky oka šroubu (Prvek BEAM).....	41
Obr. 32: Maximální kombinované napětí oka šroubu (Prvek BEAM)	42
Obr. 33: Minimální kombinované napětí oka šroubu (Prvek BEAM)	42
Obr. 34: Průběh napětí v příčném průřezu D oka šroubu (Prvek BEAM).....	43
Obr. 35: Průběh napětí v příčném průřezu B oka šroubu (Prvek BEAM).....	43
Obr. 36: Deformace ve směru působení síly (osy y) oka šroubu (Prvek BEAM)	44
Obr. 37: Okrajové podmínky oka šroubu (Prvek PLANE).....	45
Obr. 38: Linearizovaný průběh normálového napětí v ose x po příčném průřezu D oka šroubu (Prvek PLANE).....	45
Obr. 39: Linearizovaný průběh normálového napětí v ose y po příčném průřezu B oka šroubu (Prvek PLANE)	46
Obr. 40: Průběh napětí v příčném průřezu D oka šroubu (Prvek PLANE).....	47
Obr. 41: Průběh napětí v příčném průřezu B oka šroubu (Prvek PLANE).....	47
Obr. 42: Deformace ve směru působení síly (osy y) oka šroubu (Prvek PLANE)	48
Obr. 43: Lano protažené šroubem s okem (a) a jeho zjednodušený model (b)	49
Obr. 44: Okrajové podmínky oka šroubu (Prvek SOLID).....	50

Obr. 45: Ukázka sítě použité u numerických výpočtů.....	50
Obr. 46: Normálové napětí ve směru osy x po příčném průřezu D oka šroubu (Prvek SOLID).....	51
Obr. 47: Prohnutí malého lana při zatížení; hodnoty normálového napětí v ose x po příčném průřezu D zatížené malým tělesem (Prvek SOLID)	51
Obr. 48: Hodnoty normálového napětí v ose x po příčném průřezu D velkým tělesem (Prvek SOLID)	52
Obr. 49: Rozložení stykového tlaku v oku šroubu (Prvek SOLID).....	52
Obr. 50: Linearizovaný průběh normálového napětí v ose y po příčném průřezu B oka šroubu (Prvek SOLID)	53
Obr. 51: Průběh napětí v příčném průřezu D oka šroubu (Prvek SOLID)	54
Obr. 52: Průběh napětí v příčném průřezu B oka šroubu (Prvek SOLID).....	54
Obr. 53: Deformace ve směru působení síly (osy y) oka šroubu (Prvek SOLID)	55
Obr. 54: Porovnání všech průběhů napětí po příčném průřezu B oka šroubu	57
Obr. 55: Porovnání průběhů napětí po příčném průřezu D oka šroubu.....	58
Obr. 56: Porušení článkového řetězu a) v místě dotyku, b) v místě svaru [9]	60
Obr. 57: Místa porušení článku řetězu.....	60
Obr. 58: Porušení jeřábového háku [10].....	61
Obr. 59: Nákras prutu včetně rozměrů a míst s tenzometry	62
Obr. 60: Nákras zatěžování prutu	62
Obr. 61: Průběh síly v závislosti na čase.....	63
Obr. 62: Průběh přetvoření v závislosti na čase	63
Obr. 63: Průběh napětí po příčném průřezu experimentálního tělesa analytickým přístupem	64
Obr. 64: Linearizované normálové napětí ve směru osy y v příčném průřezu experimentálního tělesa	65
Obr. 65: Průběh normálových napětí po průřezu experimentálního tělesa numerickým přístupem	65
Obr. 66: Schéma tělesa vyhodnoceného pomocí fotoelasticimetrie [11].....	66
Obr. 67: Výsledek experimentu fotoelasticimetrie silně zakřiveného prutu [11].....	66
Obr. 68: Izokřivky na silně zakřiveném tělese	67
Obr. 69: Porovnání průběhů napětí v příčném průřezu experimentálního tělesa	68

SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Soubor hodnot odchylek napětí v závislosti na poměru R/h kruhového rámu	9
Tab. 2: Rozměry šroubu s okem dle normy DIN444 [8]	29
Tab. 3: Souhrn geometrický a materiálových charakteristik oka šroubu.....	34
Tab. 4: Porovnání příspěvků složek posunutí oka šroubu (silně zakřivený prut)	37
Tab. 5: Porovnání příspěvků složek posunutí oka šroubu (slabě zakřivený prut)	41
Tab. 6: Extrémní napětí v oku šroubu (Prvek BEAM)	43
Tab. 7: Extrémní napětí v oku šroubu (Prvek PLANE)	46
Tab. 8: Extrémní napětí v oku šroubu (Prvek SOLID).....	53
Tab. 9: Porovnání vypočtených hodnot extrémního napětí na příčném průřezu B oka šroubu	56
Tab. 10: Porovnání vypočtených hodnot extrémního napětí na příčném průřezu D oka šroubu (v místě zatížení).....	57
Tab. 11: Porovnání hodnot posuvu mezi příčnými průřezy C a D	59
Tab. 12: Porovnání extrémních napětí v příčném průřezu experimentálního tělesa..	68

SEZNAM PŘÍLOH

CD: Bakalářská práce 2015, Ondřej Peter 152192

- Deformačně napět'ová analýza těles s výrazně zakřivenou střednicí
- Dokument Word (.docx)
- Deformačně napět'ová analýza těles s výrazně zakřivenou střednicí
- Portable Document Format (.pdf)
- Skript Maple (.mw) použitý pro analytický výpočet
- Hodnoty získané z jednotlivých analýz v programu ANSYS
- Dokument Excel (.xlsx)